المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

11

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

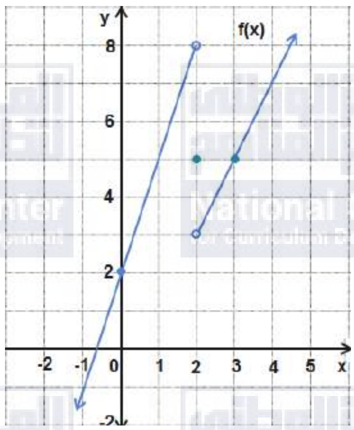
06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

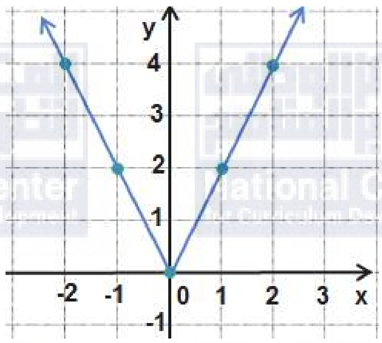
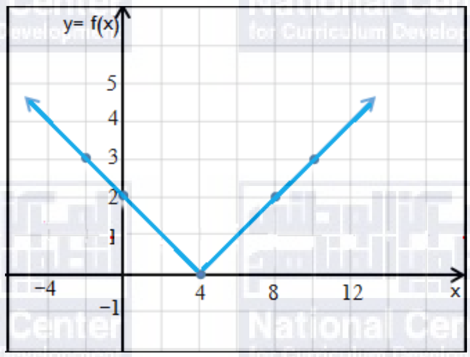
@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

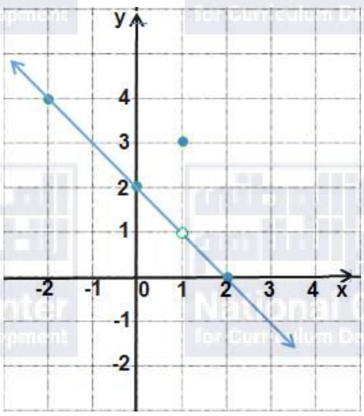
إجابات كتاب الطالب الصف الحادي عشر- المسار الأكاديمي- خطة جديدة الفصل الدارسي الأول

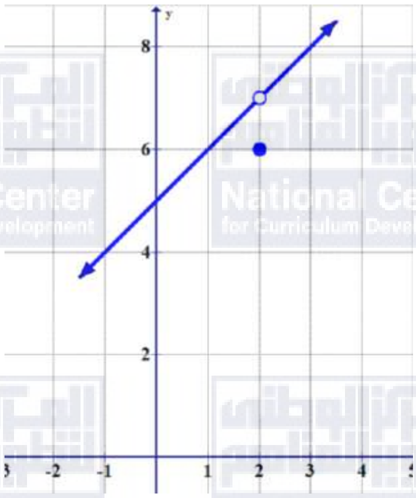
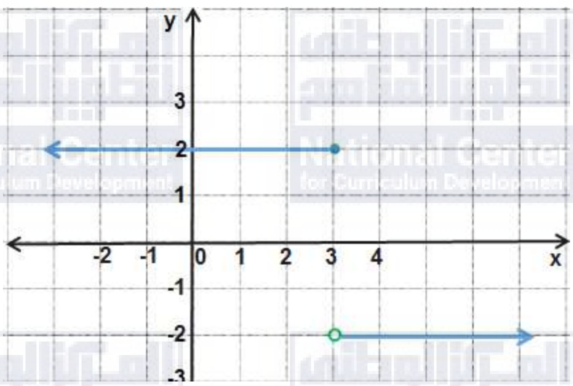
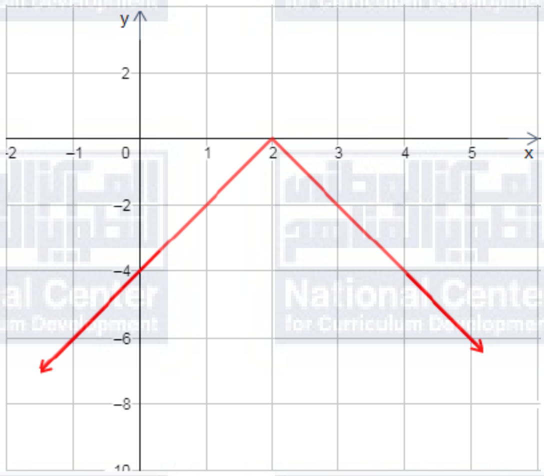
الوحدة الأولى: الاقترانات والمتتاليات والمتسلسلات

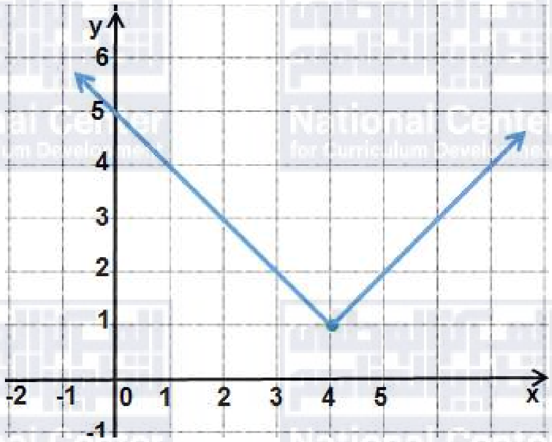
الدرس الأول: الاقترانات المتشعبة

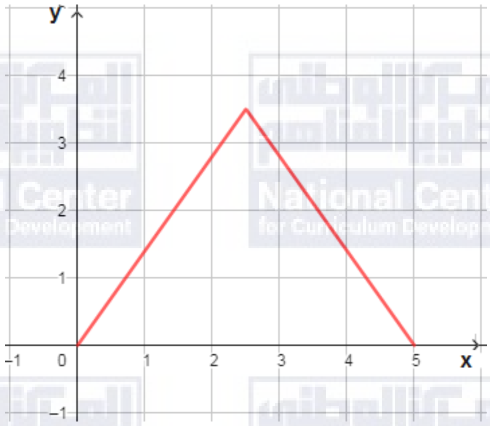
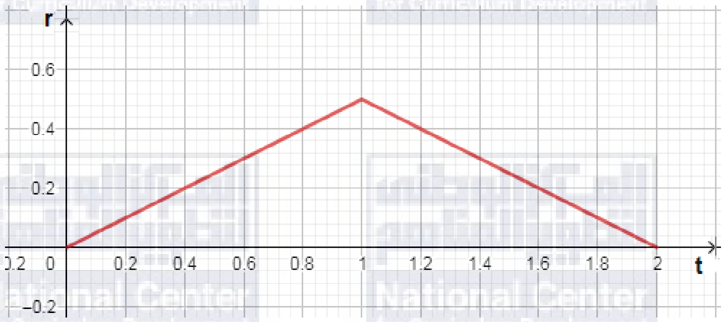
	مسألة اليوم صفحة 8
	$18 \times 0.361 + 18 \times 0.45 + 6 \times 0.55 = 17.898\, JD$
	أتحقق من فهمي صفحة 10
a	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.
b	$f(5) = 2(5) - 1 = 9$ $f(2) = 5$
c	 مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.
	أتحقق من فهمي صفحة 11
	$f(x) = \begin{cases} x+3, & x<1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}, & 1 \le x \le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$
	أتحقق من فهمي صفحة 12
	$f(x) = \begin{cases} 1.15x, & x<400 \\ 20 + 1.1x, & 400 \le x < 600 \\ x+80, & x \ge 600 \end{cases}$

	أتحقق من فهمي صفحة 13
	$f(x) = \begin{cases} 9-3x, & x<3 \\ 3x-9, & x \geq 3 \end{cases}$
	أتحقق من فهمي صفحة 15
a	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، المدى هو $[0, \infty)$. 
b	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، المدى هو $[0, \infty)$. 
	أتحقق من فهمي صفحة 17
	$f(x) = \left\lvert \frac{4}{3}x + 4 \right\rvert$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 18
1	12
2	-7
3	-3

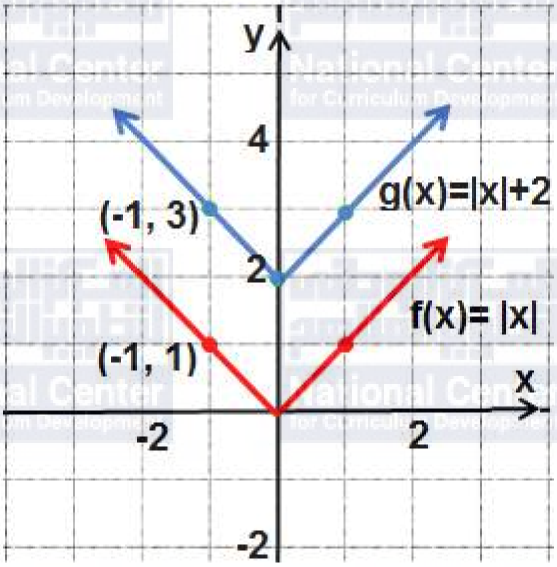
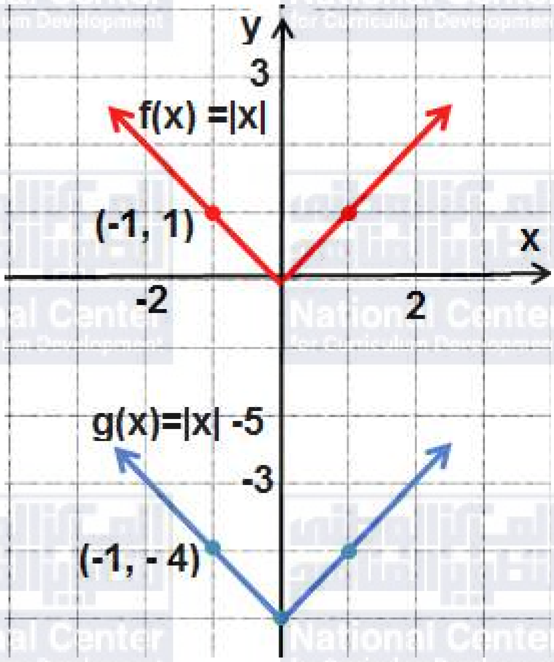
4	13
5	2
6	2
7	$f(x)=\begin{cases} 6-3x, & x<2 \\ 3x-6, & x\geq 2 \end{cases}$
8	$f(x)=\begin{cases} 8-7x, & x<\frac{5}{7} \\ 7x-2, & x\geq \frac{5}{7} \end{cases}$
9	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(5, \infty)$. 
10	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 1 أو $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$ 

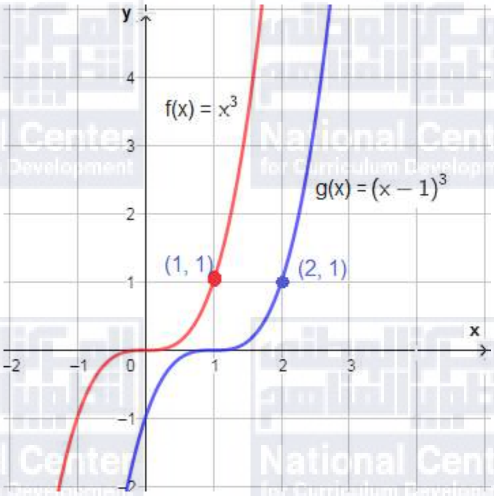
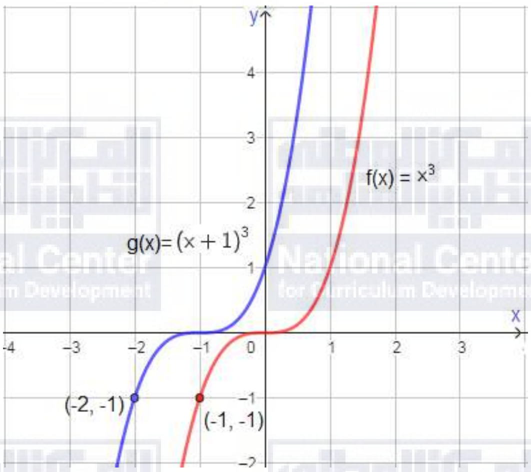
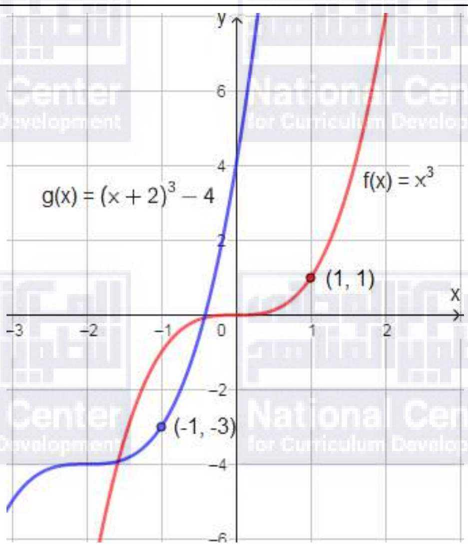
11	 المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(-\infty, 7) \cup (7, \infty)$.
12	المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى {-2 , 2} 
13	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $(-\infty, 0]$. 

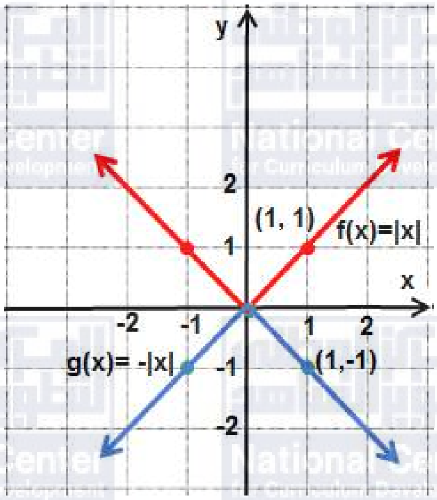
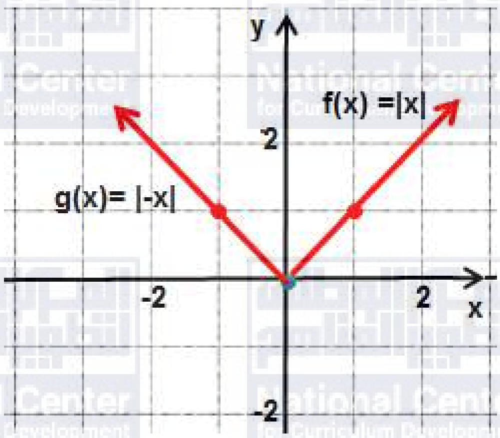
14	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $[1, \infty)$. 
15	$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -2 \\ x, & -2 < x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$
16	$f(x) = \begin{cases} 1, & -4 \leq x \leq -1 \\ -x+1, & -1 < x \leq 2 \\ -2, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$
17	$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$
18	$f(x) = \|x\| - 2$
19	$f(x) = -\|3x\|$
20	$f(x) = -\frac{1}{3}\|x-2\| + 6$

21	
22	مجال هذا الاقتران هو [0, 5]، ومداه [0, 3.5]
23	
24	استمر الهطل ساعتان لأنه توقف بعد ساعتين، يقطع المنحنى المحور الأفقي عند 0، وَ 2
25	كان أعلى معدل هطل بعد ساعة من بدئه، يبين الرسم أن القيمة العظمى عند(1, 0.5)
26	$f(x)=\begin{cases} 0.361x, & 0\le x\le 18 \\ 0.450x-1.602, & 18<x\le 36 \\ 0.550x-5.202, & 36<x\le 54 \\ x-29.502, & 54<x\le 72 \\ 1.2x-43.902, & x>72 \end{cases}$
27	a، لأن الرأس عند (2.5, 0)، ومفتوح للأعلى
28	$p=-5\,, q=-6$
29	إحداثيا نقطتي تقاطع منحنى f(x) مع المحور x هما(2, 0), (3, 0)

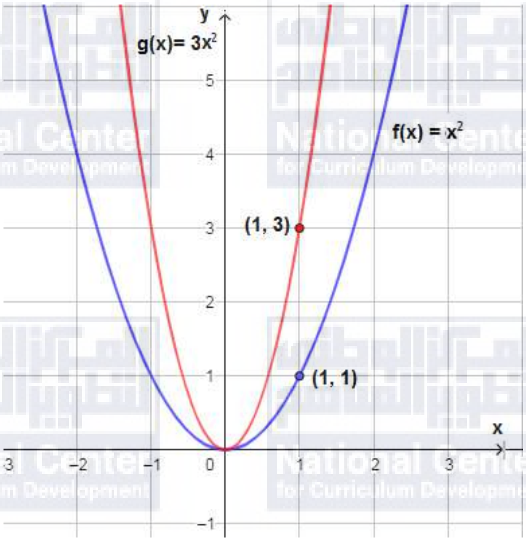
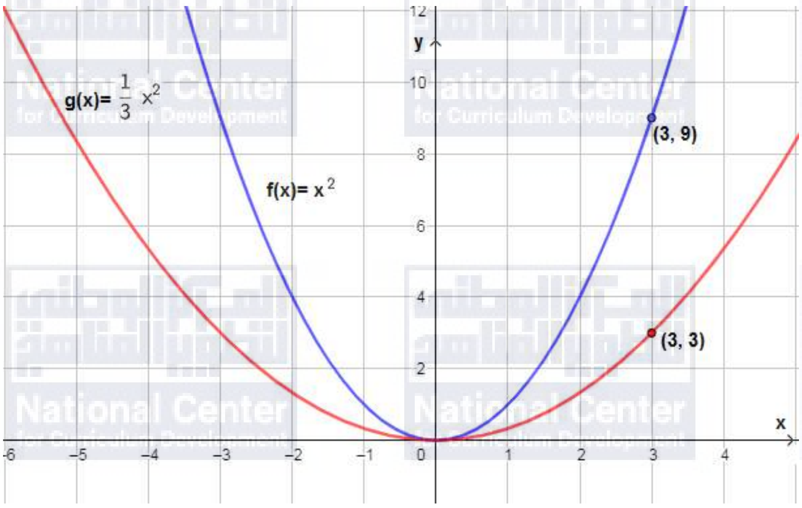
الدرس الثاني: التحويلات الهندسية للاقترانات

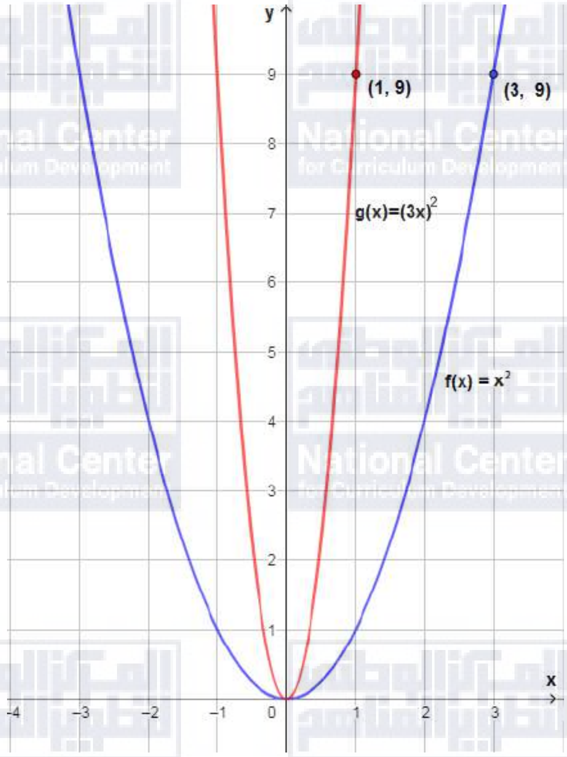
أتحقق من فهمي صفحة 22	
a	
b	

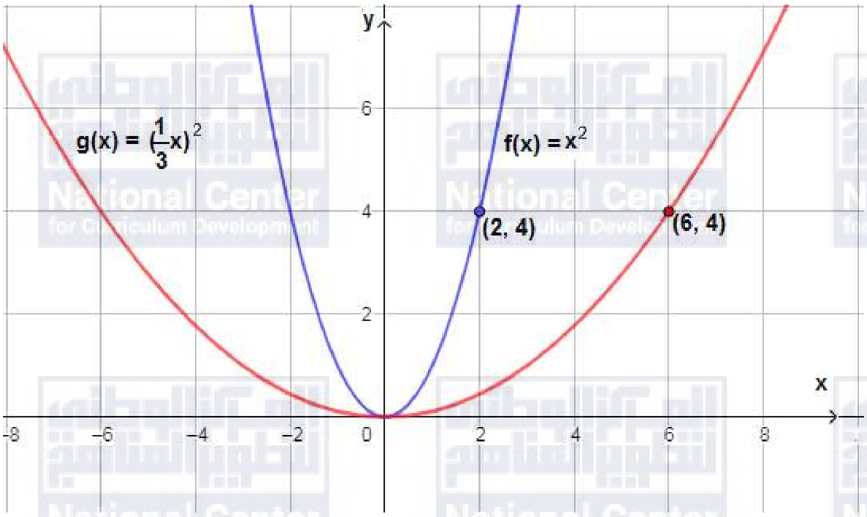
أتحقق من فهمي صفحة 23	
a	
b	
c	

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 25</td></tr>
<tr><td>a</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

يتطابق منحنى $f(x)=|x|$ مع منحنى $g(x)=|-x|$ لأنه متماثل حول المحور y، فبالانعكاس حول المحور y يبقى المنحنى على وضعه دون تغيير.</td></tr>
</table>

أتحقق من فهمي صفحة 26	
a	
b	

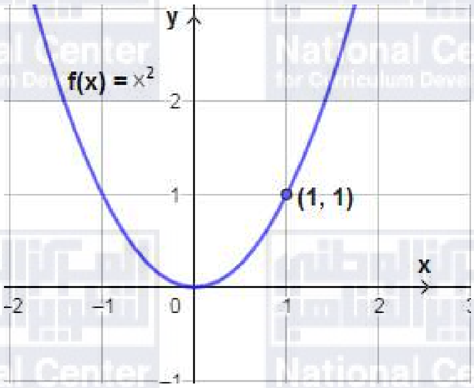
أتحقق من فهمي صفحة 27	
a	



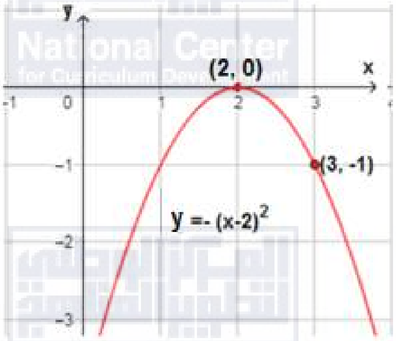
b

أتحقق من فهمي صفحة 28

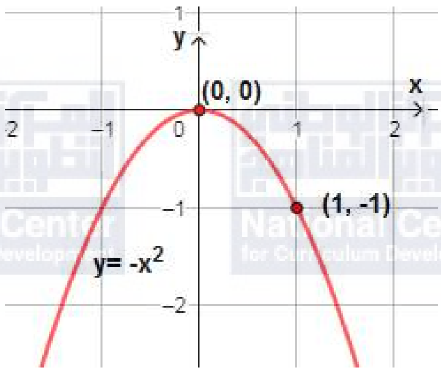
أولًا: رسم $f(x) = x^2$



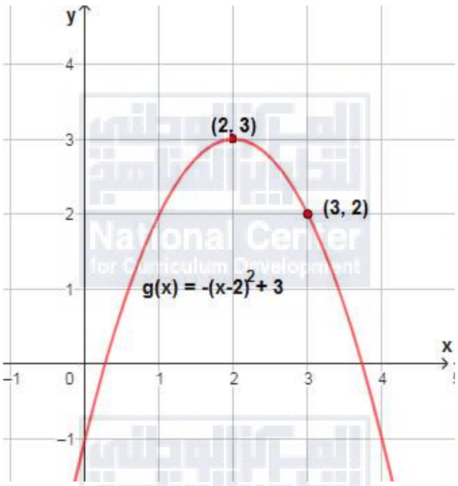
ثالثًا: انسحاب وحدتين إلى اليمين



ثانيًا: رسم انعكاس $f(x)$ حول المحور x

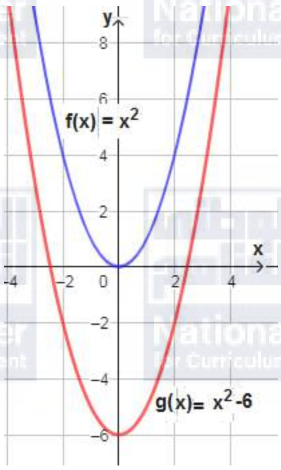


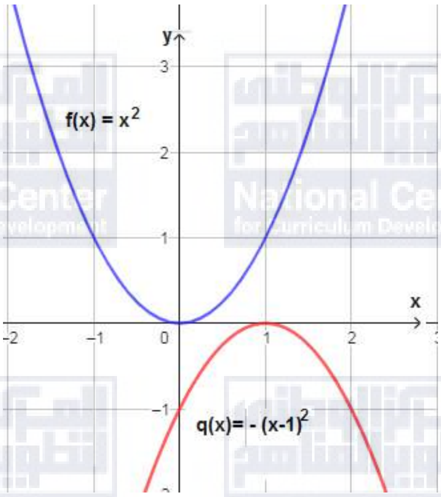
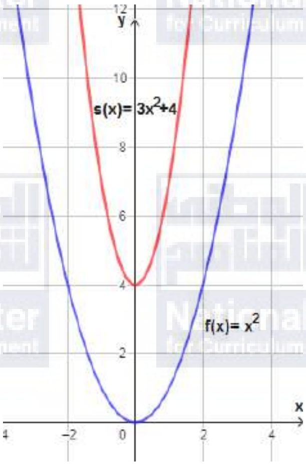
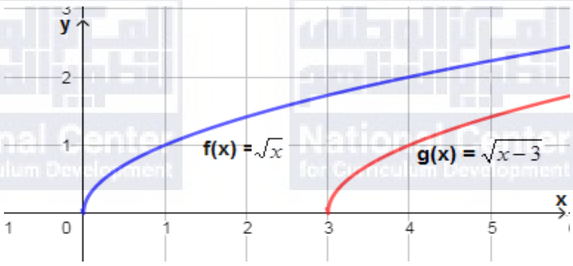
رابعًا: انسحاب 3 وحدات إلى الأعلى

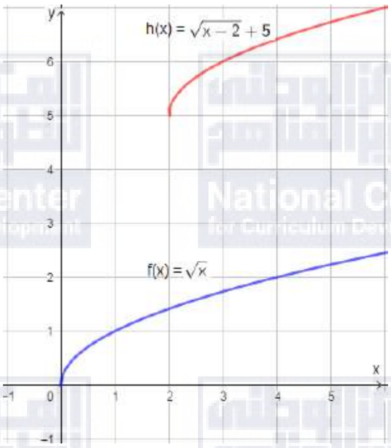
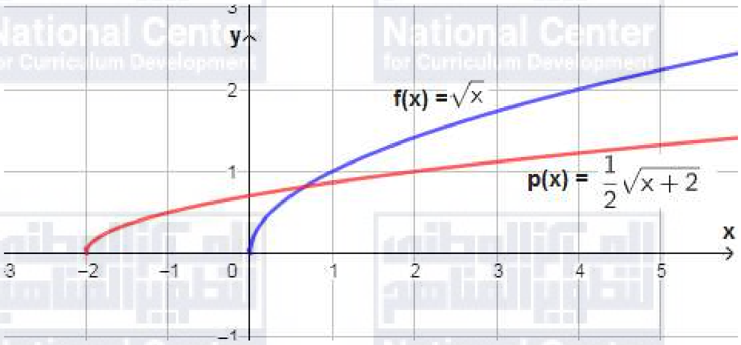
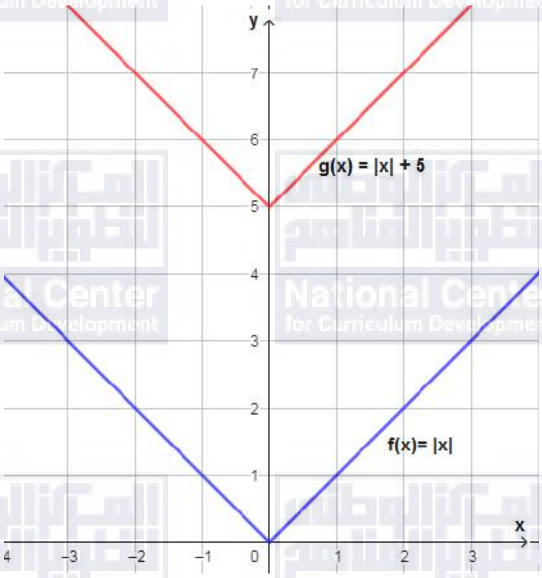


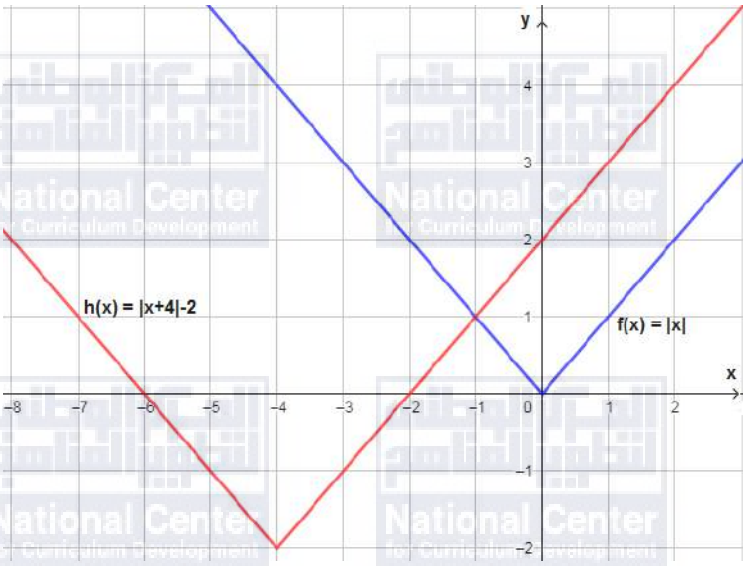
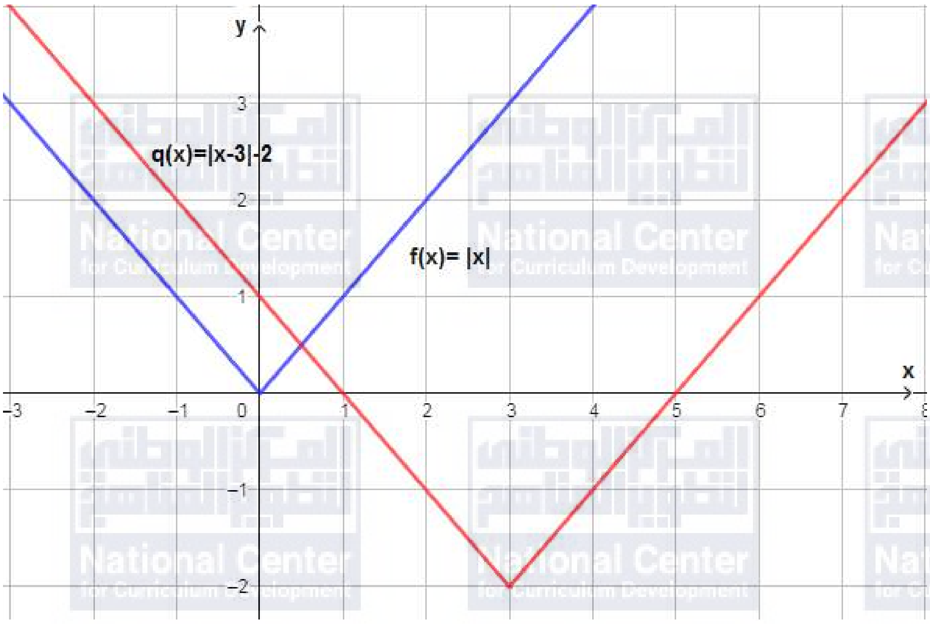
أتدرب وأحل المسائل صفحة 29

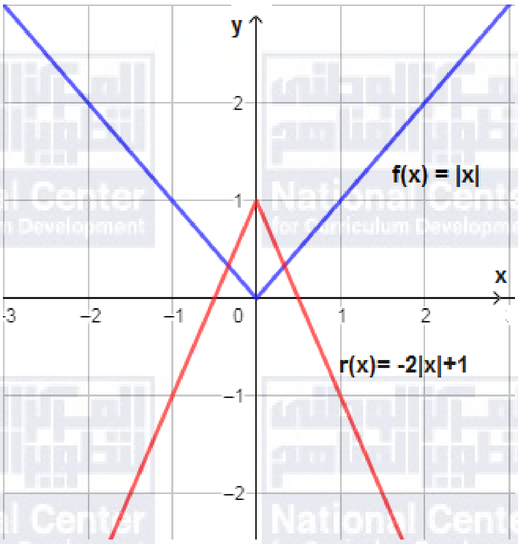
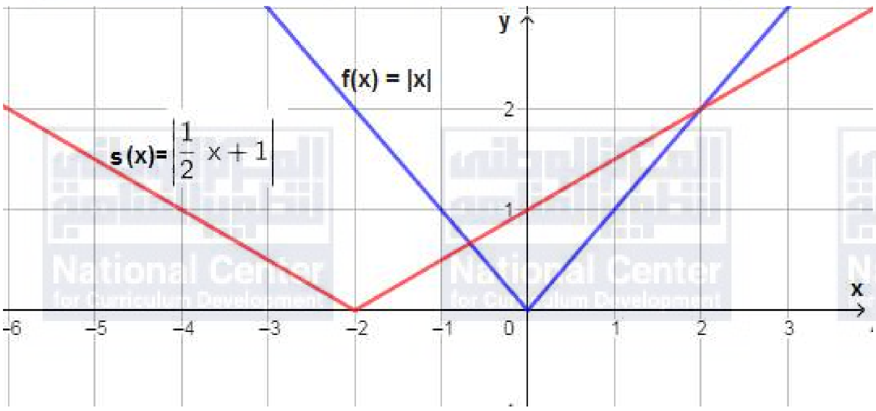
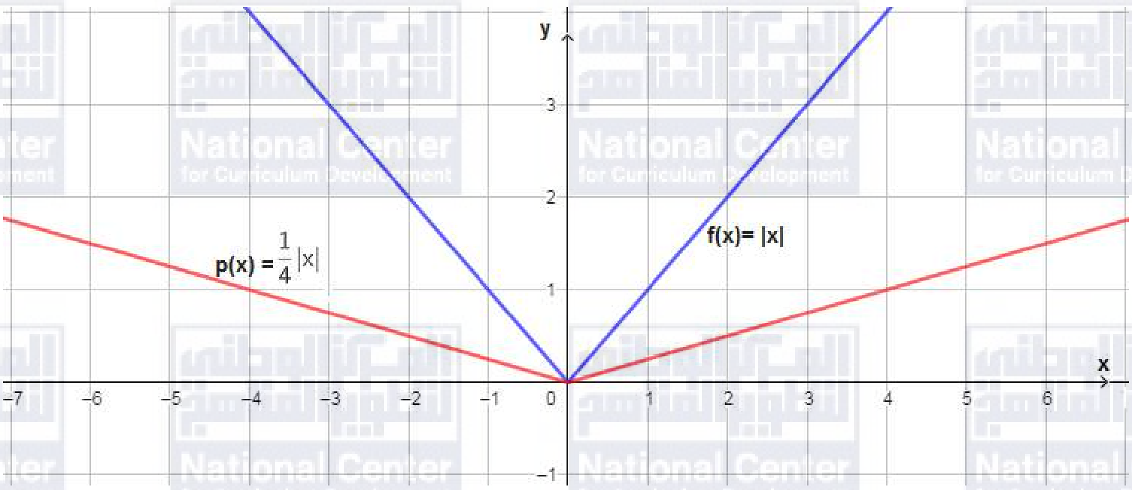
1

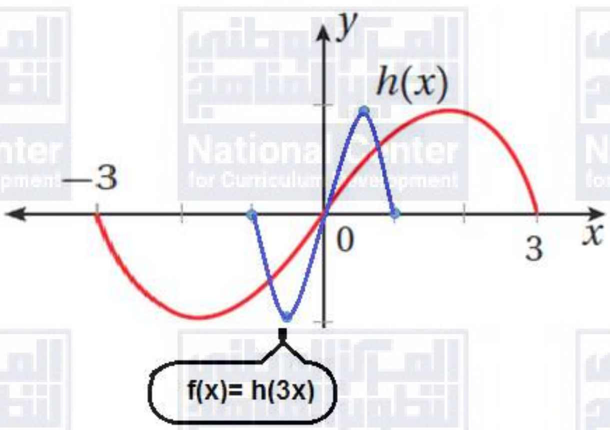
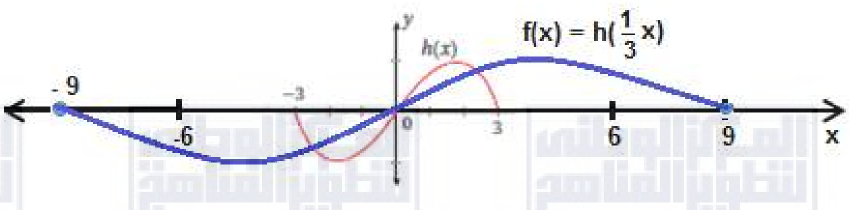


2	f(x) = x2 q(x)= - (x-1)2 x y
3	s(x)= 3x2+4 f(x)= x2 x y
4	f(x) = √x g(x) = √x − 3 x y

<table>
<tr><td>5</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td></tr>
</table>

8	
9	

10	
11	
12	
13	$g(x)=x^3+3$
14	$g(x)=\|x+1\|+2$

15	g(x)= - $\sqrt{x+2}$
16	g(x)→3, b) h(x)→1, c) g(x)→2, d) h(x)→4
17	تمدد (توسيع) رأسي معامله 2.9، وانسحاب إلى الأعلى بمقدار 20.1 وحدة.
18	متوسط الطول للاطفال بعمر 5 سنوات هو h(5×12) = h(60) h(60) = 2.9$\sqrt{60}$ +20.1≈42.6 in
19	يمثل متوسط أطوال الأطفال الذكور عند الولادة الثابت20.1
20	منحنى C(x) ناتج عن تضييق رأسي معامله $\frac{1}{2}$ لمنحنى T(x) متبوعًا بانسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
21	ضُرب الإحداثي x لكل نقطة في $\frac{1}{3}$ 
22	ضُرب الإحداثي x لكل نقطة في 3 
23	(-a, b) لأن منحنى f(-x) هو انعكاس لمنحنى f(x) حول المحورy.
24	(a, 2b) لأن منحنى 2f(x) هو توسيع لمنحنى f(x) معامله 2، لذلك يُضرب الإحداثي y في2

25	$(-a+3, b)$ لأن منحنى $f(3-x)$ هو انعكاس حول المحور y لمنحنى $f(x)$ ثم انسحاب إلى اليمين بمقدار 3 وحدات.
26	منحنى $g(x)$ ناتج عن انعكاس $f(x)$ حول المحور x وتضييق رأسي وانسحاب بمقدار وحدة واحدة للأسفل. فتكون قاعدته $g(x) = -c\sqrt{16-x^2} - 1$، وبتعويض إحداثيي النقطة $(0, -2)$ $g(0) = -c\sqrt{16-0^2} - 1$ $-2 = -c(4) - 1 \rightarrow c = \frac{1}{4}$ $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2} - 1$

الدرس الثالث: المتتاليات والمتسلسلات

مسألة اليوم صفحة 31	
	$a_{10} = 271$
أتحقق من فهمي صفحة 33	
a	$7 + 10 + 13 + 16 + \cdots + 25 = \sum_{k=1}^{7} (3k + 4)$
b	$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k+1}$
أتحقق من فهمي صفحة 33	
a	$\sum_{k=1}^{7} \frac{5k - 2}{2} = 63$
b	$\sum_{k=1}^{5} (k + 1)^2 = 90$
أتحقق من فهمي صفحة 35	
a	$\sum_{k=1}^{10} 3k^2 = 1155$
b	$\sum_{k=1}^{20} (7k - 2) = 1430$
c	$\sum_{k=1}^{5} -4k^3 = -900$
أتحقق من فهمي صفحة 37	
A	حسابية أساسها 3-
b	ليست حسابية

أتحقق من فهمي صفحة 39	
A	$a_n = -3n + 4$ $a_{15} = -41$
B	$a_n = 2n - 31$ $a_{15} = -1$
c	$26 = a_1 + 15d \quad , \quad 71 = a_1 + 6d$ $a_1 = 101 \,, d = -5$ $a_n = -5n + 106$
	أتحقق من فهمي صفحة 41
a	$159 = 7 + 8(n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 20$ $S_{20} = \frac{20}{2}(7 + 159) = 1660$
b	$d = 5 - 8 = -3$ $S_{17} = \frac{17}{2}(2(8) + 16 \times -3) = -272$
أتحقق من فهمي صفحة 43	
A	بما أن الزيادة السنوية ثابتة وتساوي 400، فإن إنفاق الجمعية السنوي يشكل متتالية حسابية أساسها 400
B	$a_n = 400n - 100$
C	$a_{10} = 3900$
D	$S_{10} = \frac{10}{2}(300 + 3900) = 21000$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 43	
1	$\sum_{k=1}^{10} k^2$

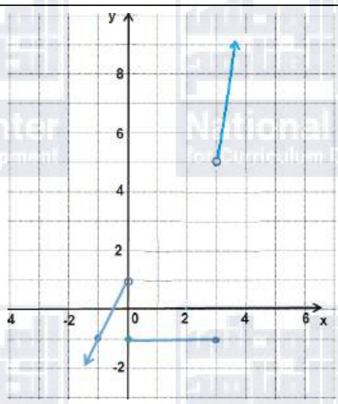
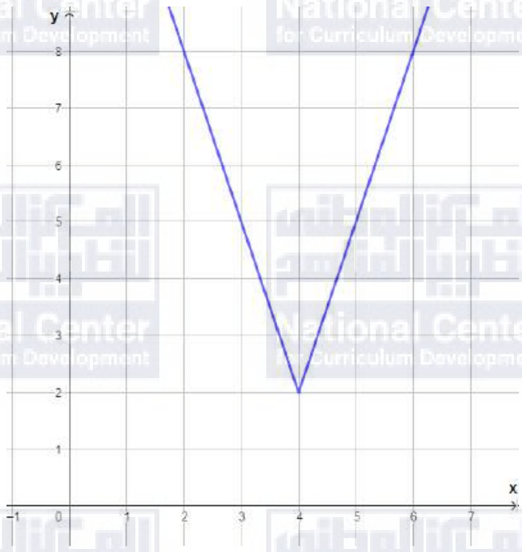
2	$\sum_{k=1}^{10} 2k$
3	$\sum_{k=1}^{13} \frac{k}{k+1}$
4	$\sum_{k=1}^{6} \left(\frac{-2}{3}\right)^k$
5	$\sum_{n=1}^{6} (-2)^n = 42$
6	$\sum_{n=1}^{4} \frac{n^2+1}{n+1} = \frac{257}{30}$
7	$\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{3^n+1} = \frac{7}{20}$
8	$\sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{2} = \frac{91}{2}$
9	$\sum_{k=1}^{9} (12k-24) = 324$
10	$\sum_{k=1}^{20} (k^3-1) = 44080$
11	ليست حسابية
12	حسابية أساسها 6-
13	ليست حسابية
14	$a_n = 33n - 8$ $a_{30} = 982$

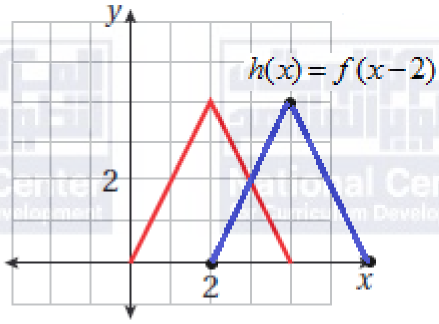
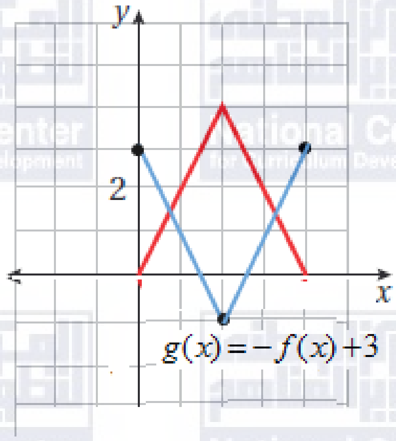
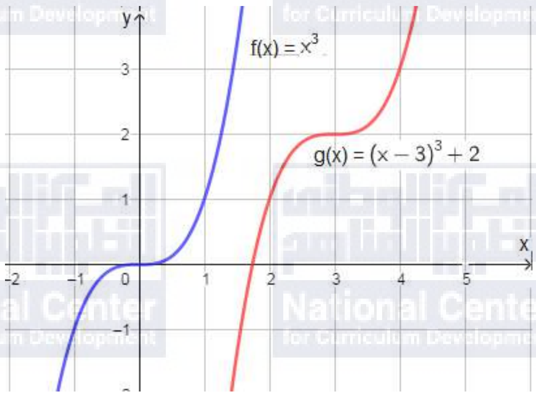
15	$a_n = \frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$ $a_{30} = \frac{55}{3}$
16	$a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{7}{2}$ $a_{30} = -\frac{23}{2}$
17	$a_n = 78 - 4n$ $a_{30} = -42$
18	$401 = 1 + 4(n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 101$ $S_{101} = \frac{101}{2}(1 + 401) = 20301$
19	$56.7 = 0.7 + 2(n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 29$ $S_{29} = \frac{29}{2}(0.7 + 56.7) = 832.3$
20	$a_1 = 0 , a_{80} = 158$ $S_{80} = \frac{80}{2}(0 + 158) = 6320$
21	$a_1 = 25 , d = 5$ $a_{16} = 25 + 5(15) = 100$
22	$792 = \frac{n}{2}(2(10) + (n-1) \times 4) \quad \Rightarrow \quad 2n^2 + 8n - 792 = 0$ $\Rightarrow n^2 + 4n - 396 = 0$ $\Rightarrow (n-18)(n+22) = 0$ $\Rightarrow n = 18$

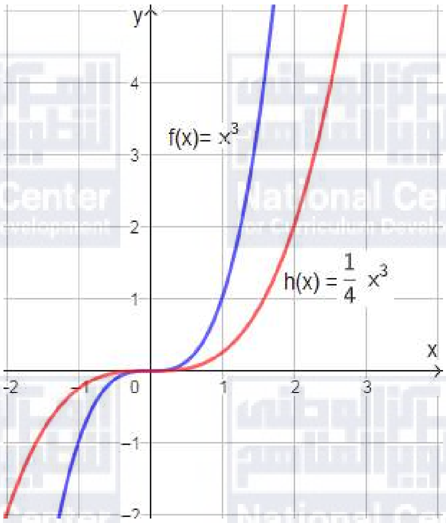
23	$S_n = n^2 + 4n$ $S_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 5$ $S_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 12 - 5 = 7$ $d = 7 - 5 = 2$ $a_n = 2n + 3$ $a_{100} = 203$
24	$1, 5, 9$ ألاحظ أنّ الفرق بين كل حدين متتابعين ثابت، وأنه يساوي 4 ؛ أي إن المتتالية حسابية أساسها 4
25	$a_n = 4n - 3$
26	$397 = 4n - 3 \quad \Rightarrow \quad n = 100$ بما أن n عدد صحيح موجب، إذن يوجد نموذج يحوي 397 نقطة.
27	$S_{30} = 2S_{20} \quad \Rightarrow \frac{30}{2}(2a + 29d) = 2 \times \frac{20}{2}(2a + 19d)$ $\Rightarrow \quad 20a + 435d = 40a + 380d$ $\Rightarrow \quad 10\,a = 55d$ $\Rightarrow \quad a = \frac{11}{2}d$
28	$400 = \frac{30}{2}\left(2a + 29 \times \frac{2}{11}a\right) \Rightarrow \quad a = \frac{11}{3}, \quad d = \frac{2}{3}$
29	$a_1 = 1$ $a_2 = 1 + 6$ $a_3 = 1 + 6 + 12$ $a_4 = 1 + 6 + 12 + 18$ … $S_{10} = 1 + \frac{9}{2}(6 + 54) = 271$

	لهما المجموع نفسه لأن الجمع عملية تبديلية. أما عند كتابتهما بصيغة المجموع فيكتبان بطريقتين مختلفتين لأنه يجب مراعاة ترتيب الحدود.
30	$1+3+5+7+9=\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$ $9+7+5+3+1=\sum_{k=1}^{5}(11-2k)$
31	$\sum_{k=1}^{5}(2k+7)=2\left(\sum_{k=1}^{5}k\right)+7\times 5=2(1+2+3+4+5)+35=65$
32	$3, a-b, 3a-4b, 2a+2b$ $(a-b)-3=3a-4b-(a-b) \implies a-2b=-3$ $(2a+2b)-(3a-4b)=(3a-4b)-(a-b) \implies 3a-9b=0 \implies a=3b$ $b=-3\,, a=-9$ $3,-6,-15,-24$ $a_1=3, d=-9$ $S_{25}=\frac{25}{2}(2(3)-(24)\times -9)=-2625$

اختبار نهاية الوحدة الأولى

1	g
2	b
3	c
4	d
5	c
6	c
7	c
8	c
9	
10	

11	
12	
13	

14	
15	$\sum_{k=1}^{6}(k^2+1)=97$
16	$\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{3}{2}\right)^k=\frac{195}{16}$
17	$\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k^2+1}=\frac{73}{85}$
18	$\sum_{k=1}^{100}(3k+4)=5550$
19	$a_n=-9n+209$, $a_{20}=29$
20	$a_n=-23n+238$, $a_{20}=-222$
21	$a_n=11n-14$, $a_{20}=206$
22	$a_n=-2n+27$, $a_{20}=-13$

23	$-299 = 7 - 6(n-1) \quad \rightarrow \quad n = 52$ $S_{52} = \frac{52}{2}(7 - 299) = -7592$
24	$-0.1 = -10 + 0.1(n-1) \quad \Longrightarrow \quad n = 100$ $S_{100} = \frac{100}{2}(-10 - 0.1) = -505$
25	$\sum_{k=1}^{20}(88 - 3k) = 1130$
26	$S_{12} = \frac{12}{2}\big(2(120) + 11(-9)\big) = 846$
27	$a_1 = 20\,, a_2 = 24 \quad \Longrightarrow \quad d = 24 - 20 = 4$ $504 = \frac{k}{2}\big(2(20) + 4(k-1)\big) \quad \Longrightarrow \quad k = 12$
28	$a_1 = 50, d = 5$ $S_{24} = \frac{24}{2}\big(2(50) + 5(23)\big) = 2580$

الوحدة الثانية: النهايات والمشتقات

الدرس الأول: النهايات والاتصال

مسألة اليوم صفحة 50

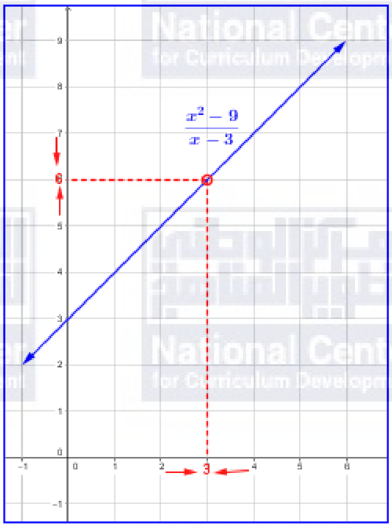
تقترب المساحة المحصورة بين الدائرة والمضلع من الصفر

أتحقق من فهمي صفحة 54

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

الحل بيانيا

a



الحل عدديا

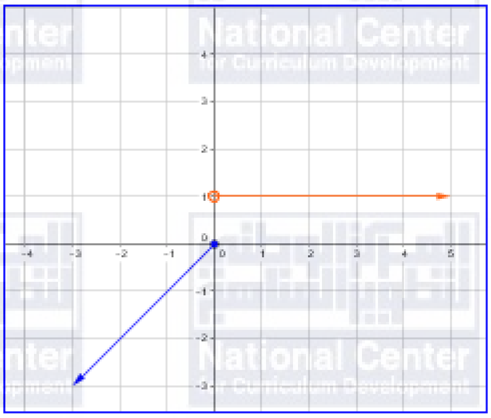
	اليسار →			3	← اليمين		
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1
	اليسار →			6	← اليمين		

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

b

الحل بيانيا



الحل عدديا:

0 اليسار ← → اليمين

x	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001		1	1	1

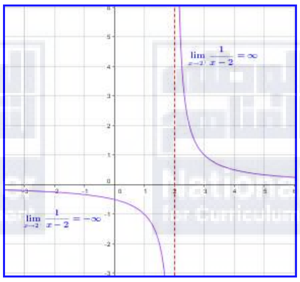
0 اليسار ← → اليمين 1

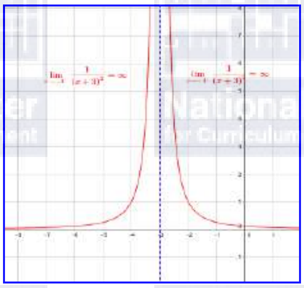
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

أتحقق من فهمي صفحة 56

a

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ غير موجودة



b	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^2}=\infty$ 
	أتحقق من فهمي صفحة 58
a	$\begin{aligned}&\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+3x^2-4)\\&=\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^3+\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4\right)\\&=2\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^3+3\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-4\\&=2(1)^3+3(1)^2-4=1\end{aligned}$
b	$\begin{aligned}&\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{1+3(x)^2}}{\lim\limits_{x\to 4}3(x)-2}\\&=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}1+3\left(\lim\limits_{x\to 4}x\right)^2}}{3\lim\limits_{x\to 4}x-\lim\limits_{x\to 4}2}=\frac{\sqrt{1+3(4)^2}}{3(4)-2}\\&=\frac{\sqrt{49}}{10}=\frac{7}{10}\end{aligned}$
	أتحقق من فهمي صفحة 59
a	$\begin{aligned}&\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+4)\\&=3(2)^2-5(2)+4=6\end{aligned}$
b	$\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{1-4x^2}$ العدد 1- لايقع ضمن مجال الاقتران فلذلك لايمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر

c	$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x-6}{x^2-2}=\frac{3^3-5(3)-6}{3^2-2}=\frac{6}{7}$
d	$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$
أتحقق من فهمي صفحة 61	
a	$\lim_{x\to 0}\frac{7x-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7-x)}{x}$ $=\lim_{x\to 0}(7-x)=7$
b	$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}\times\frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{4-(x+4)}{x(2+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(2+\sqrt{x+4})}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\sqrt{x+4}}=\frac{-1}{4}$
c	$\lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{x-5}=1$ $\lim_{x\to 5^-}\frac{5-x}{x-5}=-1$ $\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{\lvert x-5\rvert}{x-5}$ غير موجودة
أتحقق من فهمي صفحة 64	
a	الاقتران متصل عند $x=1$ لأن: $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=6$
b	الاقتران غير متصل عند $x=5$ لأن الاقتران غير معرف عند $x=5$

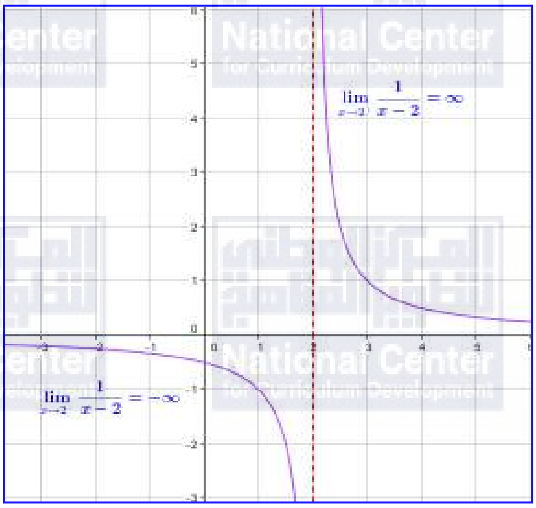
c	$h(3) = 5 - 3 = 2$ $\lim_{x\to 3^+} h(x) = 2$ $\lim_{x\to 3^-} h(x) = 2$ $\Rightarrow \lim_{x\to 3} h(x) = 2$ $\Rightarrow h(3) = \lim_{x\to 3} h(x) = 2$ إذن الاقتران متصل عند $x = 3$
d	$p(5) = 10$ $\lim_{x\to 5} p(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ $= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$ $= \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$ $\Rightarrow p(5) = \lim_{x\to 5} p(x) = 10$ إذن الاقتران متصل عند $x = 5$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 64

1

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ غير موجودة

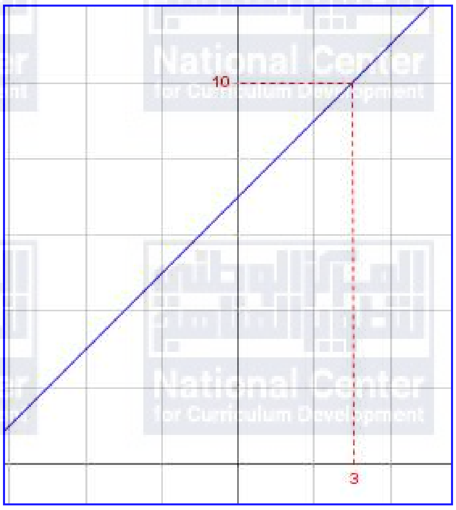
عدديا:



2

$\lim\limits_{x\to 3}(x+7)=10$

بيانيا



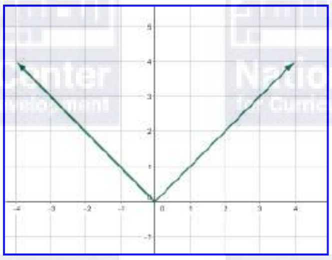
عدديا:

	اليسار			3	اليمين		
x	2.9	2.99	2.99		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	9.7	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1
	اليسار			10	اليمين		

3

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

بيانيا

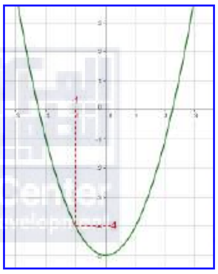


	→ اليسار			0	اليمين ←		
x	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
	→ اليسار			0	اليمين ←		

4

$\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 5) = -4$

بيانيا:



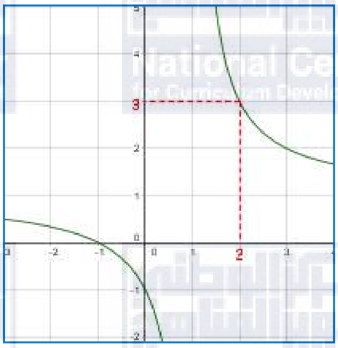
عدديا:

	→ اليسار			-1	اليمين ←		
x	-1.1	-1.01	-1.001		-0.999	-0.99	-0.9
$f(x)$	-3.79	-3.97	-3.99		-4.002	-4.02	-4.2
	→ اليسار			-4	اليمين ←		

5

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=3$$

بيانيا:

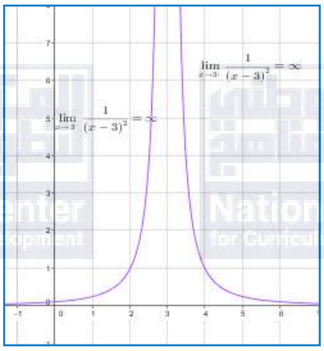


			اليسار →	2	← اليمين		
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.22	3.02	3.002		2.99	2.98	2.81
			اليسار →	3	← اليمين		

6

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$$

بيانيا:

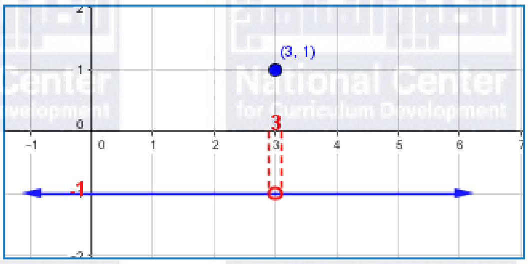


			اليسار →	3	← مين		
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100
			اليسار →	∞	← اليمين		

7

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$

بيانيا:



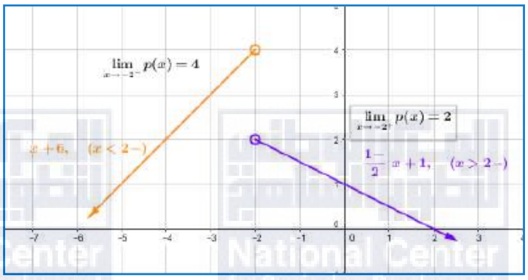
عدديا:

		اليسار ←		3	اليمين →		
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-1	-1	-1		-1	-1	-1
		اليسار ←		-1	اليمين →		

8

$\lim\limits_{x \to -2} p(x)$ غير موجودة

بيانيا:



		اليسار ←		-2	اليمين →		
x	-2.1	-2.01	-2.001		-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		1.999	1.995	1.95
		اليسار ←	4		2 اليمين →		

9

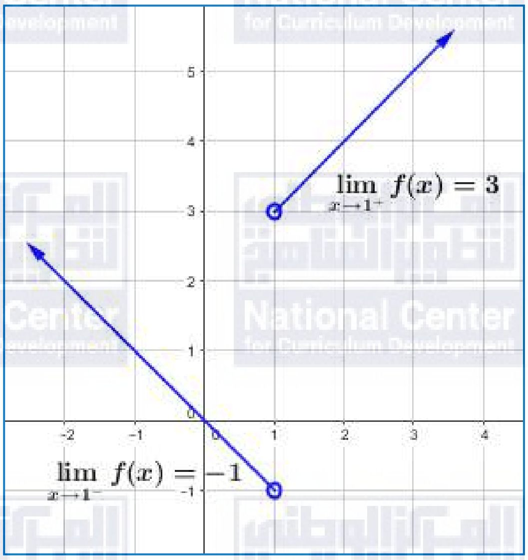
$\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4x + 7) = 9 - 12 + 7 = 4$

10	$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{9-16}{3-4}=\frac{-7}{-1}=7$
11	$\lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(3+\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{100}{9}$
12	$\lim_{x\to 2\pi}(x^3+\pi x-5\pi^3)$ $=8\pi^3+2\pi^2-5\pi^3$ $=3\pi^3+2\pi^2$
13	$\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x-3}{2x+4}}=\sqrt{\frac{-6}{-2}}=\sqrt{3}$
14	$\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{x^2+11}$ $=\sqrt[3]{16+11}=3$
15	$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$ $=\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=27$
16	$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{x+1}$ $=\lim_{x\to -1}\frac{(2x+3)(x+1)}{x+1}$ $=\lim_{x\to -1}(2x+3)=1$

17	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\lvert x-2\rvert}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{\lvert x-2\rvert}$ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3$ $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x+1)(x-2)}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2^+}(-1)(x+1)=-3$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\lvert x-2\rvert}$غير موجودة
18	$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$ $=\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-7)=2$ $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x-1)=2$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}f(x)=2$
19	$\lim\limits_{t\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}}{t-4}=\lim\limits_{t\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}}{t-4}\times\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}}$ $=\lim\limits_{t\to 4}\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{(t-4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{t\to 4}\frac{4-t}{4t}\times\frac{1}{(t-4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{t\to 4}\frac{-1}{4t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{-1}{16}$
20	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$
21	$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$
22	$\lim\limits_{x\to -2}f(x)$غير موجودة

23	$\lim_{x\to 1} h(x) = -1$
24	$\lim_{x\to 2} h(x)$ غير موجودة
25	$\lim_{x\to 3} h(x) = 2$
26	$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ بما أن الاقتران كثير حدود فإن $\lim_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1) \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + 0 = 5$ $\Rightarrow a + b = 5$ $\lim_{x\to -2} f(x) = 8 = f(-2)$ $\Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + 0 = 8$ $\Rightarrow 4a - 2b = 8$ بحل نظام المعادلات الخطية الناتج بالحذف أو التعويض نجد ان $a = 3 \quad , b = 2$
27	$\lim_{x\to 2}(f(x) + g(x))$ $= 2 + 0 = 2$
28	$\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$ $= \sqrt{3+1} = 2$
29	$\lim_{x\to 0}(f(x) \times g(x)) = 0 \times \lim_{x\to 0} g(x) = 0$
30	متصل لأنه كثير حدود
31	متصل لأن الاقتران نسبي معرف عند $x = -5$

32	38) $h(0) = 3$ $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 3$ $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x)$غير موجودة إذن الاقتران غير متصل عند $x = 0$
33	الاقتران متصل عند $x = 3$ إذن $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow 3 + 3 = 2 + \sqrt{k}$ $\Rightarrow 4 = \sqrt{k} \Rightarrow k = 16$

34	$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2+\lvert x-1\rvert-1}{\lvert x-1\rvert}$ غير موجودة بيانيا:  جبريا: $$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+\lvert x-1\rvert-1}{\lvert x-1\rvert} = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x-1-1}{x-1}$$ $$= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$ $$= \lim_{x\to1^+}(x+2) = 3$$ $$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+\lvert x-1\rvert-1}{\lvert x-1\rvert} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-x+1-1}{1-x}$$ $$= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-x}{1-x} = \lim_{x\to1^-} \frac{x(x-1)}{1-x} = -1$$ $$\Rightarrow \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+\lvert x-1\rvert-1}{\lvert x-1\rvert} \neq \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+\lvert x-1\rvert-1}{\lvert x-1\rvert}$$ $\Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{x^2+\lvert x-1\rvert-1}{\lvert x-1\rvert}$ غير موجودة

35	بما أن المقام صفر والنهاية موجودة إذن البسط صفر $\sqrt{m(0)+b}-3=0$ $\sqrt{b}=3 \Rightarrow b=9$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{mx+b}-3}{x}\times\frac{\sqrt{mx+b}+3}{\sqrt{mx+b}+3}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{mx+b-9}{x\left(\sqrt{mx+b}+3\right)}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{mx+9-9}{x\left(\sqrt{mx+9}+3\right)}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{m}{\left(\sqrt{mx+9}+3\right)}$ $=\frac{m}{3+3}=1 \Rightarrow m=6$
36	$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-a(x-1)}{(x-1)(x^2-1)}$ $=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-ax+a}{(x-1)(x^2-1)}$ بتحليل البسط $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-a+1}{(x^2-1)}$ بما أن المقام عند $x=1$ صفر والنهاية موجودة إذن البسط عند $x=1$ يجب أن يكون صفر $\Rightarrow 1-a+1=0 \Rightarrow a=2$

الدرس الثاني: مشتقة اقتران القوة

	مسألة اليوم صفحة 66
	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ميل المنحنى عند النقطة $(1,1)$ هو: $f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$ ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1,1)$ هو نفسه ميل المستقيم L
	أتحقق من فهمي صفحة 68
	$f(x) = 4x^2 + 1$ $f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{4(-1+h)^2 + 1 - 5}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{4(1-2h+h^2) - 4}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{4 - 8h + 4h^2 - 4}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{-8h + 4h^2}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{h(-8+4h)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} (-8+4h)$ $= -8$

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 68</td></tr>
<tr><td></td><td>

$f(x) = 8 - x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 - (x+h)^2 - 8 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 - (x^2 + 2xh + h^2) - 8 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 - x^2 - 2xh - h^2 - 8 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x - h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-2x - h)$$

$$= -2x$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 69</td></tr>
<tr><td>a</td><td>

$y = x^{-11}$

$$\frac{dy}{dx} = -11x^{-12}$$

</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$

$$\frac{dy}{dx} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

</td></tr>
<tr><td>c</td><td>

$y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 71</td></tr>
</table>

a	$y=\sqrt{x}+\frac{4}{x^2}$ $=x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{3}{2}}$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}$
b	$y=\frac{x^5-8x^6}{4x}$ $=\frac{x^5}{4x}-\frac{8x^6}{4x}$ $=\frac{1}{4}x^4-2x^5$ $\frac{dy}{dx}=x^3-10x^4$

أتحقق من فهمي صفحة 72

$$y = 8x - \frac{1}{x} = 8x - x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8 + x^{-2} = 8 + \frac{1}{x^2}$$

$$m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0.25} = 8 + \frac{1}{0.25^2} = 24$$

$$y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$$

$$y - -2 = 24(x - 0.25)$$

$$y + 2 = 24x - 6$$

$$y = 24x - 8$$ معادلة المماس

$$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{24}$$

$$y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$$

$$y - -2 = \frac{-1}{24}(x - 0.25)$$

$$y + 2 = \frac{-1}{24}x + \frac{1}{96}$$

$$y = \frac{-1}{24}x - \frac{191}{96}$$ معادلة العمودي

أتحقق من فهمي صفحة 74	
a	$f(x) = 1 - \sqrt{x}\ , f'(x) = -\frac{1}{4}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $-\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $2\sqrt{x} = 4$ $\sqrt{x} = 2$ $x = 4$ $f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$ نقطة التماس هي $(4, -1)$
b	$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2\ , f'(x) = 0$ $f'(x) = -3x^2 + 6x$ $0 = -3x^2 + 6x$ $3x(-x + 2) = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = 2$ $f(0) = -2$ $f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$ نقطتا التماس هما $(0, -2), (2,2)$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 75	
1	$f(x) = 4x^2 \quad , \qquad x = 1$ $f'(1) = \lim_{h\to0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{4(1+h)^2 - (4)}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{4(1+2h+h^2) - 4}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{4+8h+4h^2-4}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{8h+4h^2}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{h(8+4h)}{h}$ $= \lim_{h\to0}(8+4h) = 8$
2	$f(x) = 1 - x^2, \qquad x = -2$ $f'(-2) = \lim_{h\to0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{1-(-2+h)^2-(-3)}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{1-(4-4h+h^2)+3}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{-3+4h-h^2+3}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{4h-h^2}{h}$ $= \lim_{h\to0} \frac{h(4-h)}{h}$ $= \lim_{h\to0}(4-h) = 4$

3	$f(x) = x^2 + x \ , \quad x = 2$ $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + (2+h) - (6)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{(4+4h+h^2) + (2+h) - 6}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{6+5h+h^2-6}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{5h+h^2}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{h(5+h)}{h}$ $= \lim_{h\to 0}(5+h) = 5$
4	$f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x = -1$ $f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - (6)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{(1-2h+h^2) + (2-2h) - 3}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{3-4h+h^2-3}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{-4h+h^2}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{h(-4+h)}{h}$ $= \lim_{h\to 0}(-4+h) = -4$

5	$f(x) = 4x + 1$ $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{4(x+h) + 1 - (4x+1)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{4x + 4h + 1 - 4x - 1}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{4h}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} 4$ $= 4$
6	$y = 1 - x$ $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1 - (x+h) - (1-x)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1 - x - h - 1 + x}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-h}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} (-1)$ $= -1$

7	$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ $f'(x) \quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h) - 1 - (\frac{1}{2}x - 1)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}h - 1 - \frac{1}{2}x + 1}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}$

8	$y=\frac{2x+4}{6}$ $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3}(x+h)+\frac{2}{3}-(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}h+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3}h}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{1}{3}$ $=\frac{1}{3}$
9	$y=10x-\frac{6}{\sqrt{x}}$ $=10x-6x^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx}=10+3x^{-\frac{3}{2}}$ $=10+\frac{3}{\sqrt{x^3}}$

10	$y = x^8 - x^{-8}$ $\frac{dy}{dx} = 8x^7 + 8x^{-9}$ $= 8x^7 + \frac{8}{x^9}$
11	$y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$ $= 9x^{-2} + 3x^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = -18x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $= -\frac{18}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
12	$y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ $= \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$ $= x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
13	$y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$ $= 6x^{-3} + 2x^{-2} - 3$ $\frac{dy}{dx} = -18x^{-4} - 4x^{-3}$ $= -\frac{18}{x^4} - \frac{4}{x^3}$

14	$y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$ $= 20x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 17$ $\frac{dy}{dx} = 100x^4 + x^{-\frac{2}{3}}$ $= 100x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
15	$y = x^2 - x$ $x = 4 \Longrightarrow y = (4)^2 - 4 = 12 \quad \Longrightarrow (4,12)$ نقطة التماس $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=4} = 2(4) - 1 = 7$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - 12 = 7(x - 4)$ $y - 12 = 7x - 28$ $y = 7x - 16$ معادلة المماس
16	$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{7}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - 12 = \frac{-1}{7}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{-1}{7}x + \frac{4}{7}$ $y = \frac{-1}{7}x + \frac{88}{7}$ معادلة العمودي
17	$f(x) = \frac{24}{x} = 24x^{-1}$ $f'(x) = -24x^{-2} = -\frac{24}{x^2}$

18	ميل المماس عند النقطة (x, y) التي تقع على منحنى الاقتران f هو $f'(x)$ وبما أن المقدار $-\frac{24}{x^2}$ سالب دائمًا، إذن، ميل المماس سالب دائمًا عند أي نقطة.
19	$y = -6 \Rightarrow -6 = \frac{24}{x} \Rightarrow x = -4 \Rightarrow (-4, -6)$ نقطة التماس $m_{\text{المماس}} = f'(4) = -\frac{24}{(-4)^2} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$ $m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{2}{3}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y + 6 = \frac{2}{3}(x + 4)$ $y + 6 = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$ معادلة العمودي
20	$f(x) = x^2 - x - 12$ $f'(x) = 2x - 1$ $m_{\text{المماس}} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$ $y = f(2) = 2^2 - 2 - 12 = -10 \Rightarrow (2, -10)$

21	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $3x^2 - 8x = 0$ $x(3x - 8) = 0$ $x = 0$ أو $3x - 8 = 0 \quad \Longrightarrow 3x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{8}{3}$ $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$ النقاط هي $(0, -4), \left(\frac{8}{3}, -\frac{364}{27}\right)$
22	ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x) = 1$ $f'(x) = 10x - 49$ $1 = 10x - 49$ $10x = 50$ $x = 5$ $f(5) = 5(5)^2 - 49(5) + 12 = 125 - 245 + 12 = -108$ النقطة هي $(5, -108)$
23	$f'(x) = 6 - 2x$ $f'(1) = 6 - 2 = 4$ معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = 4(x - 1)$ $y - 5 = 4x - 4$ $y = 4x + 1$

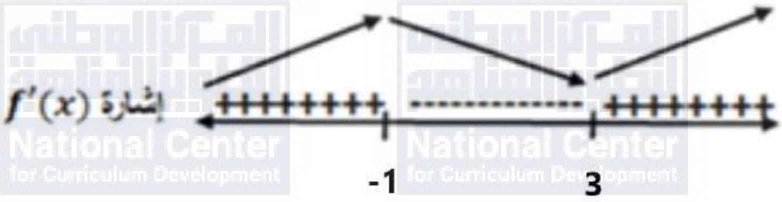
24	معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$	
25	$f'(x) = -2x$ معادلة المماس عند النقطة $(-1,5)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = 2(x + 1)$ $y - 5 = 2x + 2$ $y = 2x + 7$ معادلة المماس عند النقطة $(1,5)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = -2(x - 1)$ $y - 5 = -2x + 2$ $y = -2x + 7$	
26	$2x + 7 = -2x + 7$ $4x = 0$ $x = 0$ $y = -2(0) + 7 = 7$ نقطة تقاطع المماسين هي: $(0,7)$	

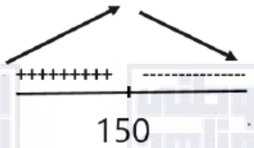
27	$y = x^2 + 4x$ $x = k \Rightarrow y = k^2 + 4k \Rightarrow (k, k^2 + 4k)$ نقطة التماس $\frac{dy}{dx} = 2x + 4$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=k} = 2k + 4$ $y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$ $y - k^2 - 4k = (2k + 4)(x - k)$ $y - k^2 - 4k = (2k + 4)x - 2k^2 - 4k$ $y = (2k + 4)x - k^2$ $y - (2k + 4)x + k^2 = 0$ معادلة المماس
28	$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{2k + 4}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - k^2 - 4k = \frac{-1}{2k + 4}(x - k)$ $y - k^2 - 4k = \frac{-1}{2k + 4}x + \frac{k}{2k + 4}$ $y = \frac{-1}{2k + 4}x + \frac{k}{2k + 4} + k^2 + 4k$ $4y = \frac{-4}{2k + 4}x + \frac{4k}{2k + 4} + 4k^2 + 16k$ $4y + \frac{4}{2k + 4}x = \frac{4k}{2k + 4} + 4k^2 + 16k$ $\frac{4}{2k + 4} = 1 \Rightarrow k = 0$

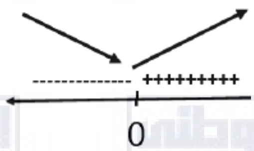
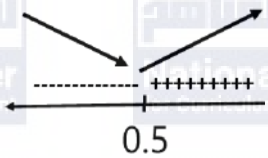
29	$f(x)=\frac{100}{x}=100x^{-1}$ $f'(x)=-100x^{-2}=-\frac{100}{x^2}$ $m_{\text{المماس}}=\frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=a}=-\frac{100}{a^2}$ $y-\frac{100}{a}=-\frac{100}{a^2}(x-a)$ $y-\frac{100}{a}=-\frac{100}{a^2}x+\frac{100}{a}$ $\Rightarrow y=-\frac{100}{a^2}x+\frac{200}{a}$ معادلة المماس يجب حساب المقطع x والمقطع y للمماس الذي معادلته $y=-\frac{100}{a^2}x+\frac{200}{a}$ $x=0\Rightarrow y=\frac{200}{a}$ $y=0\Rightarrow x=2a$ $A=\frac{1}{2}(2a)\left(\frac{200}{a}\right)=200$

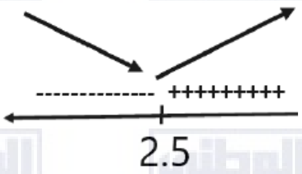
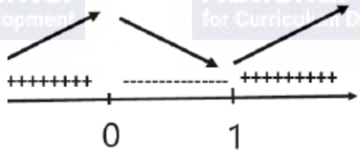
الدرس الثالث: القيم العظمى والصغرى

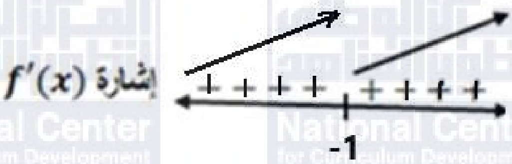
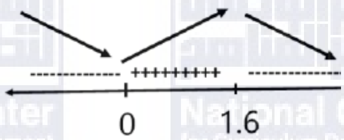
	مسألة اليوم صفحة 77
1	$(0,20),(30,40)$
2	$(20,30),(50,80)$
3	$(40,50)$
	أتحقق من فهمي صفحة 78
a	$f(x) = 6x^2 - 12x + 12$ $f'(x) = 12x - 12$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ النقطة الحرجة على منحنى الاقتران f هي: $(1, f(1)) = (1,6)$
b	$h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ $h'(x) = 2x^2 - 6x + 4$ $h'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2\,, x = 1$ النقطة الحرجة على منحنى الاقتران f هي: $(1, f(1)) = \left(1, -\frac{10}{3}\right), (2, f(2)) = \left(2, \frac{13}{3}\right)$
	أتحقق من فهمي صفحة 81
A	$f(x) = 6x^2 - 6x + 12$ $f'(x) = 12x - 6$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.5$  إذن، f متناقص في الفترة $(-\infty, 0.5)$، ومتزايد في الفترة $(0.5, \infty)$

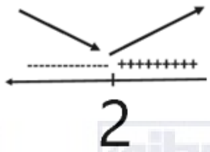
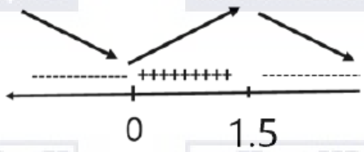
b	$h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ $h'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ $h'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x + 4 = 0$ لكن مميز هذه العبارة التربيعية سالب، ومنه فإنه لا أصفار لهذه المشتقة، فيكون $h'(x) > 0$ لجميع قيم x الحقيقية. إذن، h متزايد على $\mathscr{R}$
	أتحقق من فهمي صفحة 82
a	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$ $\Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Longrightarrow (x-3)(x+1) = 0$ $\Longrightarrow x = 3, x = -1$ $x = 3 \Longrightarrow y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) - 1 = -28$ $x = -1 \Longrightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 1 = 4$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(3, -28), (-1, 4)$
b	 النقطة $(3,15)$ صغرى محلية، والنقطة $(-1,-5)$ عظمى محلية.

	أتحقق من فهمي صفحة 84
	$P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$ $P'(t) = 120 - 0.8t$ $120 - 0.8t = 0 \Rightarrow t = 150$ $P(150) = 120(150) - 0.4(150)^2 + 1000 = 10000$  أكبر عدد يمكن أن تصل اليه الضفادع 10000 ضفدع
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 84
1	$f(x) = x^2 - 6x + 10$ $f'(x) = 2x - 6$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0$ $\Rightarrow x = 3$ النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: $(3,1)$
2	$f(x) = 1 - 12x + 2x^2$ $f'(x) = 4x - 12$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$ النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: $(3, -17)$
3	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ $f'(x) = x^2 - 1$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $\left(1, -\frac{2}{3}\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right)$

4	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ $f'(x) = x^2 - 2x$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0, x = 2$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), \left(2, -\frac{4}{3}\right)$
5	$f(x) = 4x + 3$ $f'(x) = 4$ الاقتران f متزايد على مجموعة الأعداد الحقيقية
6	$f(x) = 7 - 5x$ $f'(x) = -5$ الاقتران f متناقص على مجموعة الأعداد الحقيقية
7	$f(x) = x^2 + 7$ $f'(x) = 2x$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$  الاقتران f متناقص على $(-\infty, 0)$ ومتزايد على $(0, \infty)$
8	$f(x) = x^2 - x$ $f'(x) = 2x - 1$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$  الاقتران f متناقص على $(-\infty, 0.5)$ ومتزايد على $(0.5, \infty)$

9	$f(x) = x^2 - 5x + 2$ $f'(x) = 2x - 5$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$  الاقتران f متناقص على $(-\infty, 2.5)$ ومتزايد على $(2.5, \infty)$
10	$f(x) = 2x^3 - 3x^2$ $f'(x) = 6x^2 - 6x$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 6x = 0$ $\Longrightarrow 6x(x-1) = 0$ $\Longrightarrow x = 0, x = 1$  الاقتران f متناقص على $(0,1)$ ومتزايد على $(-\infty, 0), (1, \infty)$

11	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$ $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0$ $\Longrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ $\Longrightarrow (x+1)^2 = 0$ $\Longrightarrow x = -1$  إذن، f متزايد على مجموعة الأعداد الحقيقية.
12	$f(x) = 3x^2(12 - 5x) = 36x^2 - 15x^3$ $f'(x) = 72x - 45x^2$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 72x - 45x^2 = 0$ $\Longrightarrow 9x(8 - 5x) = 0$ $\Longrightarrow x = 0, x = \frac{8}{5} = 1.6$  الاقتران f متزايد على $(0,1.6)$ ومتناقص على $(-\infty, 0), (1.6, \infty)$

13	$f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ $f'(x) = 2x - 4$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$ $\Rightarrow x = 2$  الاقتران f متناقص على $(-\infty, 2)$ ومتزايد على $(2, \infty)$
14	$f(x) = 2x^3 - x^4$ $f'(x) = 6x^2 - 4x^3$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 4x^3 = 0$ $\Rightarrow 2x^2(3 - 2x) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2} = 1.5$  الاقتران f متزايد على $(0,1.5)$ ومتناقص على $(-\infty, 0), (1.5, \infty)$

<table>
<tr><td>15</td><td>

$y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x - 15$

$\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

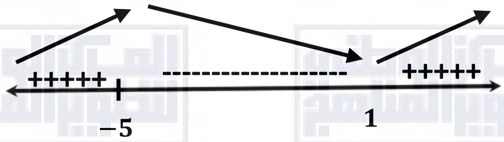
$\Rightarrow (x-1)(x+5) = 0$

$\Rightarrow x = 1, x = -5$

$x = 1 \Rightarrow y = (1)^3 + 6(1)^2 - 15(1) - 90 = -98$

$x = -5 \Rightarrow y = (-5)^3 + 6(-5)^2 - 15(-5) - 90 = 10$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-5,10), (1,-98)$



النقطة $(1,-98)$ صغرى محلية، والنقطة $(-5,10)$ عظمى محلية.

</td></tr>
<tr><td>16</td><td>

$y = -(x-2)^3 + 1 = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 1 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$

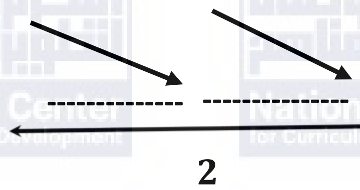
$\dfrac{dy}{dx} = -3x^2 + 12x - 12$

$\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x - 12 = 0 \Rightarrow -3(x^2 - 4x + 4) = 0$

$\Rightarrow -3(x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$

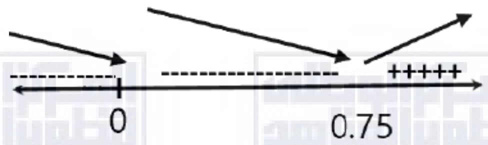
$x = 2 \Rightarrow y = -(2-2)^3 + 1 = 1$

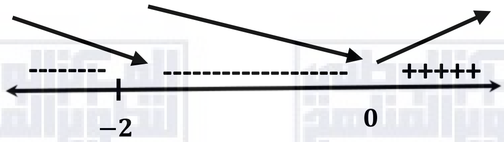
النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: $(2,1)$

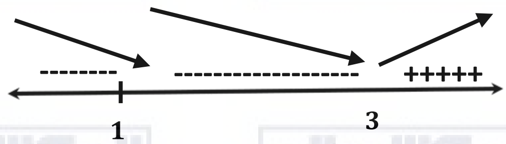


النقطة $(2,1)$ نقطة انعطاف أفقي.

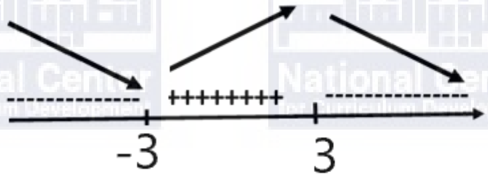
</td></tr>
</table>

17	$f(x) = x^4 - x^3$ $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 3x^2 = 0$ $\Longrightarrow x^2(4x-3) = 0$ $\Longrightarrow x = 0, x = \frac{3}{4} = 0.75$ $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$ $x = \frac{3}{4} \Longrightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{81}{256} - \frac{27}{64} = -\frac{27}{256}$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0)$, $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{256}\right)$  النقطة $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{256}\right)$ صغرى محلية، والنقطة $(0,0)$ انعطاف أفقي.

<table>
<tr><td>18</td><td>$f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$
$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 48x$
$f'(x) = 0 \Longrightarrow 12x^3 + 48x^2 + 48x = 0$
$\Longrightarrow x^3 + 4x^2 + 4x = 0$
$\Longrightarrow x(x^2 + 4x + 4) = 0$
$\Longrightarrow x(x+2)^2 = 0$
$\Longrightarrow x = 0, x = -2$
$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 3(0)^4 + 16(0)^3 + 24(0)^2 + 3 = 3$
$x = -2 \Longrightarrow f(-2) = 3(-2)^4 + 16(-2)^3 + 24(-2)^2 + 3 = -13$
النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-2,-13), (0,3)$


النقطة $(0,3)$ صغرى محلية، والنقطة $(-2,-13)$ نقطة انعطاف أفقي.</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$f'(x) = (x-1)^2(x-3)$
$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1, x = 3$
قيم x التي يكون عندها نقاط حرجة لهذا الاقتران هي: $x = 1, x = 3$
$f'(x) = (x-1)^2(x-3)$


إذن، عند $x = 3$ توجد قيمة صغرى محلية، وعند $x = 1$ توجد نقطة انعطاف أفقي</td></tr>
</table>

20	$V(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$ $V'(x) = 18 - 2x^2$ $V'(x) = 0 \Longrightarrow 18 - 2x^2 = 0$ $\Longrightarrow 2(9 - x^2) = 0$ $\Longrightarrow 2(3 - x)(3 + x) = 0$ $\Longrightarrow x = 3, x = -3$  يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما $x = 3$
21	$y = x^3 + ax^2 + b$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 2ax = 0$ $\Longrightarrow x(3x + 2a) = 0$ $\Longrightarrow x = 0, x = -\frac{2}{3}a$ إذن، للاقتران نقطة حرجة عندما $x = 0$ أي عند تقاطعه مع المحور y
22	إذا كان $a > 0$ يكون ترتيب أصفار المشتقة على خط الأعداد كالآتي:  إذن، للاقتران قيمة صغرى محلية عندما $x = 0$

23	$f(2) = 4a - 8 + c = -7 \Longrightarrow 4a + c = 1$ $f'(x) = 2ax - 4$ $f'(2) = 4a - 4 = 0 \quad \Longrightarrow a = 1 \;\;,\;\; c = -3$
24	$y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11 \quad ,p > 0$ $\frac{dy}{dx} = 3px^2 - 8px + 5$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 3px^2 - 8px + 5 = 0$ $\Delta = (-8p)^2 - 4(3p)(5) = \; 64p^2 - 60p$ حتى يكون للاقتران نقطتان حرجتان يجب أن يكون مميز هذه العبارة التربيعية موجبًا. $64p^2 - 60p > 0 \Longrightarrow 4p(16p - 15) > 0$ $\Longrightarrow p \in \left(\frac{15}{16}, \infty\right)$

الدرس الرابع: المشتقة الثانية وتطبيقاتها

مسألة اليوم صفحة 86	
	$v(t) = t + 15$ $a(t) = 1$ $a(3) = 1\ m/s^2$
أتحقق من فهمي صفحة 87	
a	$f'(x) = 4x^3 - 6x$ $f''(x) = 12x^2 - 6$
b	$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$ $f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$ $f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$
أتحقق من فهمي صفحة 89	
	$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ $3x^2 - 4x - 4 = 0$ $(3x + 2)(x - 2) = 0$ $x = -\frac{2}{3}$ أو $x = 2$ القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$ $f''(x) = 6x - 4$ $f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$ $f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$ توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{175}{27}$ توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 90

a

$$f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x^2$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 8x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 4x^2(x-2) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0, x = 2$$

$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$$

$$x = 2 \Longrightarrow y = 16 - \frac{64}{3} = -\frac{26}{3}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), \left(2, -\frac{26}{3}\right)$

$$f''(x) = 12x^2 - 16x$$

$$f''(2) = 48 - 32 = 16 > 0$$

إذن، $\left(2, -\frac{26}{3}\right)$ نقطة صغرى محلية

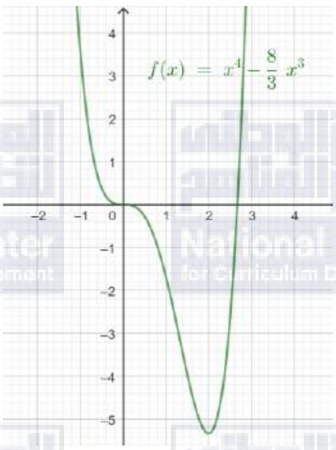
$$f''(0) = 0$$

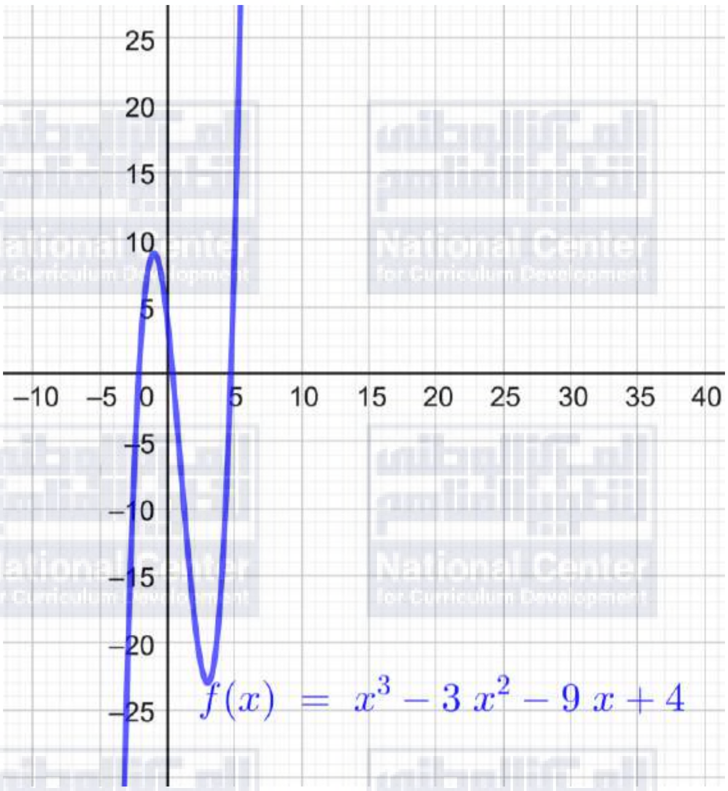
يجب دراسة إشارة المشتقة الأولى حول $x = 0$ لتحديد نوع النقطة.

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 8(-1)^2 = -12$$

$$f'(1) = 4(1)^3 - 8(1)^2 = -4$$

إذن، $(0,0)$ نقطة انعطاف أفقي.

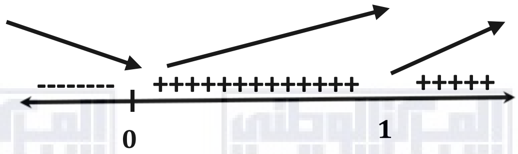


	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$ $\Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Longrightarrow (x-3)(x+1) = 0$ $\Longrightarrow x = 3, x = -1$ $x = 3 \Longrightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = -23$ $x = -1 \Longrightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = 9$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(3,-23), (-1,9)$ $f''(x) = 6x - 6$ $f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$ إذن، $(3,-23)$ نقطة صغرى محلية $f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$ إذن، $(-1,9)$ نقطة عظمى محلية
b	

	أتحقق من فهمي صفحة 92
a	$v(t) = 6t - 3t^2$ $v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9$ m/s
b	بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 3$
c	$a(t) = 6 - 6t$ $a(3) = 6 - 6(3) = -12$ m/s^2
d	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $6t - 3t^2 = 0$ $3t(2 - t) = 0$ $t = 0$ أو $t = 2$
	أتحقق من فهمي صفحة 94
a	$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ $v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0$ m/s
b	$a(t) = 6t - 12$ $a(3) = 6(3) - 12 = 6$ m/s^2
c	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $3t^2 - 12t + 9 = 0$ $t^2 - 4t + 3 = 0$ $(t - 1)(t - 3) = 0$ $t = 1$ أو $t = 3$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 94
1	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 18x - 8$
2	$f'(x) = -6x^{-4}$ $f''(x) = 24x^{-5}$
3	$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$ $f''(x) = 6x - 10x^{-3}$

4	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
5	$f'(x)=-4+2x-3x^2$ $f''(x)=2-6x$
6	$f(x)=8x^3-3x+\frac{4}{x}=8x^3-3x+4x^{-1}$ $f'(x)=24x^2-3-4x^{-2}$ $f''(x)=48x+8x^{-3}$ $f''(-2)=48(-2)+8(-2)^{-3}=-96-1=-97$
7	$f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $f''(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}$ $f''(4)=\frac{3}{8}$

8	$y = x^4 - 2x^2$ $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 4x = 0$ $\Longrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ $\Longrightarrow 4x(x+1)(x-1) = 0$ $\Longrightarrow x = 0, x = -1, x = 1$ $x = 0 \Longrightarrow y = (0)^4 - 2(0)^2 = 0$ $x = -1 \Longrightarrow y = (-1)^4 - 2(-1)^2 = -1$ $x = 1 \Longrightarrow y = (1)^4 - 2(1)^2 = -1$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (1,-1), (-1,-1)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=0} = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0$ إذن، $(0,0)$ نقطة عظمى محلية $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=1} = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$ إذن، $(1,-1)$ نقطة صغرى محلية $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=-1} = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$ إذن، $(-1,-1)$ نقطة صغرى محلية

9	$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$ $\Longrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$ $\Longrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$ $\Longrightarrow x(x-1)^2 = 0$ $\Longrightarrow x = 0, x = 1$ $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 3(0)^4 - 8(0)^3 + 6(0)^2 = 0$ $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 3(1)^4 - 8(1)^3 + 6(1)^2 = 1$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (1,1)$ $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$ $f''(0) = 36(0)^2 - 48(0) + 12 = 12 > 0$ إذن، $(0,0)$ نقطة صغرى محلية $f''(1) = 36(1)^2 - 48(1) + 12 = 0$  إذن، $(1,1)$ نقطة انعطاف أفقي

10	$y = x^2(x-4) = x^3 - 4x^2$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 8x = 0$ $\Longrightarrow x(3x-8) = 0$ $\Longrightarrow x = 0, x = \frac{8}{3}$ $x = 0 \Longrightarrow y = (0)^2(0-4) = 0$ $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \left(\frac{8}{3}\right)^2\left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{64}{27}$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), \left(\frac{8}{3}, -\frac{64}{27}\right)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 8$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=0} = 6(0) - 8 = -8 < 0$ إذن، $(0,0)$ نقطة عظمى محلية $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=\frac{8}{3}} = 6\left(\frac{8}{3}\right) - 8 = 8 > 0$ إذن، $\left(\frac{8}{3}, -\frac{64}{27}\right)$ نقطة صغرى محلية

$y = x^5 - 5x^3$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 15x^2$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 5x^4 - 15x^2 = 0$

$\Longrightarrow 5x^2(x^2 - 3) = 0$

$\Longrightarrow 5x^2\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$

$\Longrightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

$x = 0 \Longrightarrow y = (0)^5 - 5(0)^3 = 0$

$x = -\sqrt{3} \Longrightarrow y = \left(-\sqrt{3}\right)^5 - 5\left(-\sqrt{3}\right)^3 = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \Longrightarrow y = \left(\sqrt{3}\right)^5 - 5\left(\sqrt{3}\right)^3 = -6\sqrt{3}$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), \left(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$

11 $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 30x$

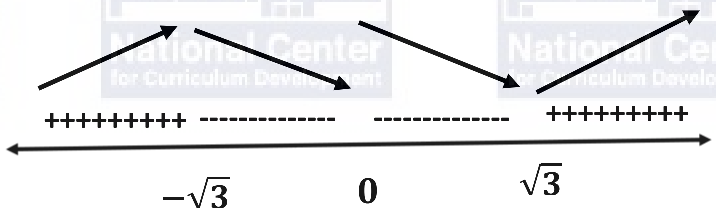
$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-\sqrt{3}} = 20\left(-\sqrt{3}\right)^3 - 30\left(-\sqrt{3}\right) = -30\sqrt{3} > 0$

إذن، $\left(-\sqrt{3}, -30\sqrt{3}\right)$ نقطة عظمى محلية

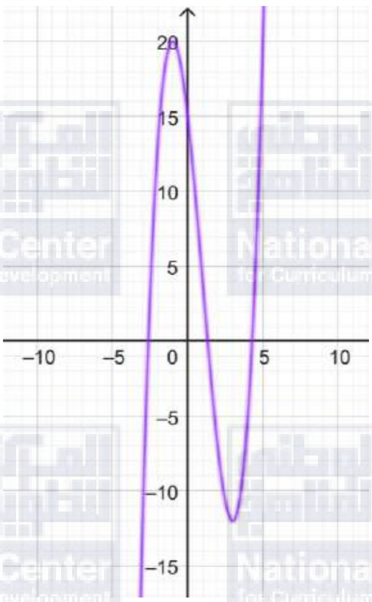
$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\sqrt{3}} = 20\left(\sqrt{3}\right)^3 - 30\left(\sqrt{3}\right) = 30\sqrt{3} > 0$

إذن، $\left(\sqrt{3}, 30\sqrt{3}\right)$ نقطة صغرى محلية

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 20(0)^3 - 30(0) = 0$



إذن، $(0,0)$ نقطة انعطاف أفقي

12	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$ $\Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Longrightarrow (x+1)(x-3) = 0$ $\Longrightarrow x = -1, x = 3$ $x = -1 \Longrightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15 = 20$ $x = 3 \Longrightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 15 = -12$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-1,20), (3,-12)$ $f''(x) = 6x - 6$ $f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$ إذن، $(-1,20)$ نقطة عظمى محلية $f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$ إذن، $(3,-12)$ نقطة صغرى محلية 

$y = x^2 - 12x - 20$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 12$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0$

$\Rightarrow x = 6$

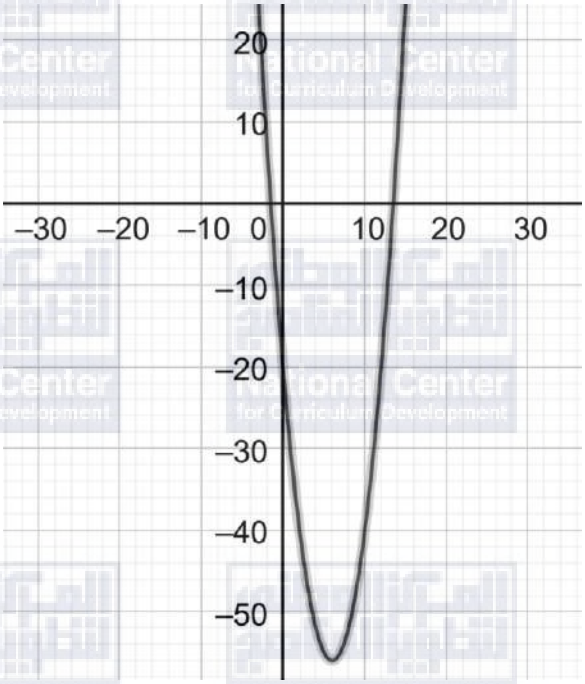
$x = 6 \Rightarrow y = (6)^2 - 12(6) - 20 = -56$

النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: $(6, -56)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=6} = 2 > 0$

13 إذن، $(6, -36)$ نقطة صغرى محلية



$f(x) = x^3 - 6x^2 - 180x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 180$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 12x - 180 = 0$

$\Longrightarrow x^2 - 4x - 60 = 0$

$\Longrightarrow (x+6)(x-10) = 0$

$\Longrightarrow x = -6, x = 10$

$x = -6 \Longrightarrow f(-6) = (-6)^3 - 6(-6)^2 - 180(-6) = 648$

$x = 10 \Longrightarrow f(10) = (10)^3 - 6(10)^2 - 180(10) = -1400$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(-6,648), (10,-1400)$

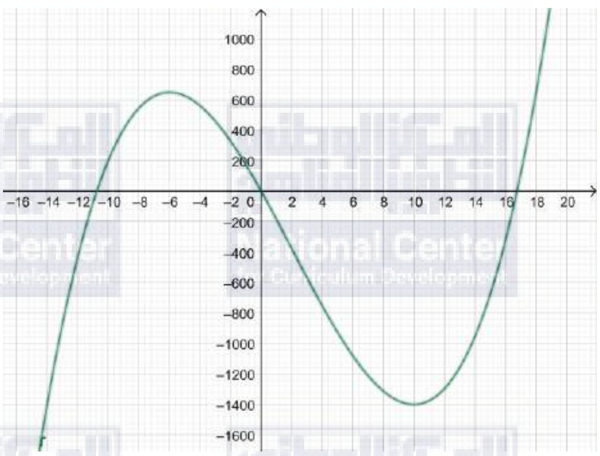
$f''(x) = 6x - 12$

14 $f''(-6) = 6(-6) - 12 = -48 < 0$

إذن، $(-6,648)$ نقطة عظمى محلية

$f''(10) = 6(10) - 12 = 48 > 0$

إذن، $(10,-1400)$ نقطة صغرى محلية



15

$$y = 2x^4 - 15x^2 + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 30x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 8x^3 - 30x = 0 \Longrightarrow 2x(4x^2 - 15) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0, x = -\frac{\sqrt{15}}{2}, x = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$x = 0 \Longrightarrow y = 12$$

$$x = -\frac{\sqrt{15}}{2} \Longrightarrow y = -\frac{129}{8}$$

$$x = \frac{\sqrt{15}}{2} \Longrightarrow y = -\frac{129}{8}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,12), \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 30$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -30 < 0$$

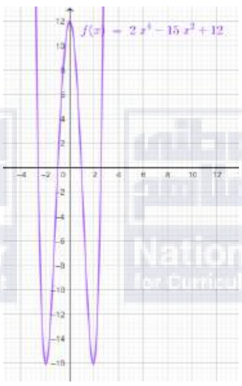
إذن، $(0,12)$ نقطة عظمى محلية

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-\frac{\sqrt{15}}{2}} = 60 > 0$$

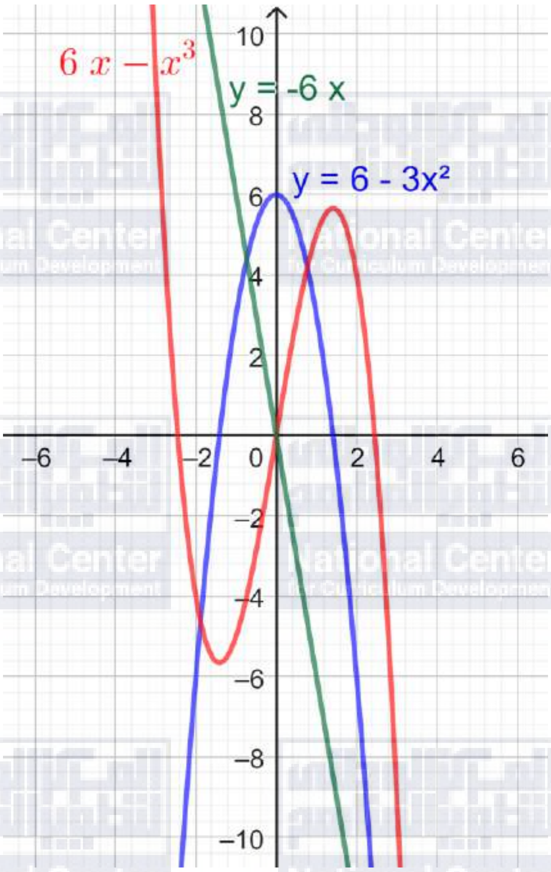
إذن، $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right)$ نقطة صغرى محلية

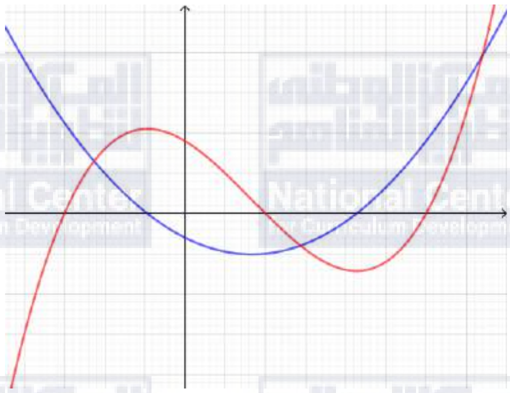
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{\sqrt{15}}{2}} = 60 > 0$$

إذن، $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right)$ نقطة صغرى محلية



16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285\ \mathrm{m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 3$
18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500\ \mathrm{m/s^2}$
19	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0$ أو $t = 2$
20	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4\ \mathrm{m/s}$
21	$a(t) = 2$ $a(6) = 2\ \mathrm{m/s^2}$
22	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $2t - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4$

23	$y = x(6 - x^2) = 6x - x^3$ $\frac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$ 
24	نلاحظ أنه في الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران متزايدًا، تكون إشارة مشتقته موجبة، أي أن منحنى المشتقة فوق المحور x و في الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران متناقصًا، تكون إشارة مشتقته سالبة، أي أن منحنى المشتقة تحت المحور x وعند قيم x التي تكون عظمى محلية أو صغرى محلية في منحنى الاقتران، تكون مشتقته صفرًا، أي أن منحنى المشتقة يقطع المحور x

25	
26	$v(t) = 3t^2 - 12$ $a(t) = 6t$ $a(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$ $v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$
27	$v(t) = 6t^2 - 24$ $a(t) = 12t$ $v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \rightarrow \quad t = 2$ $a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$

الدرس الخامس: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 96

مساحة سطح الحوض المفتوح من الأعلى : $S = 4xy + x^2$

حجم الحوض : $V = x^2 y$

$$0.2 = x^2 y \quad \rightarrow \quad y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{0.2}{x^2}\right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \quad \rightarrow x^3 = 0.4 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''(\sqrt[3]{0.4}) = \frac{1.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{0.4}$ ،

وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4}\ \text{m} \;, \qquad y = \frac{0.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^2}\ \text{m}$$

<table>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 98</th></tr>
<tr><td>مساحة المستطيل
محيط المستطيل

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:</td><td>$A = xy$
$P = 2x + 2y$
$54 = 2x + 2y$
$27 = x + y \quad \rightarrow \quad y = 27 - x$
$A = xy$
$A(x) = x(27 - x)$
$= 27x - x^2$
$A'(x) = 27 - 2x$
$27 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{2}$

$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$

$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25 \text{ m}^2$</td></tr>
</table>

أتحقق من فهمي صفحة 100	
المساحة الكلية لسطح الخزان حجم الخزان	$S = 4xh + 2x^2$ $V = x^2h$ $2 = x^2h \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{2}{x^2}$ $S = 4xh + 2x^2$ $S(x) = 4x\left(\dfrac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \dfrac{8}{x} + 2x^2$ $S'(x) = \dfrac{-8}{x^2} + 4x$ $\dfrac{-8}{x^2} + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x = \dfrac{8}{x^2} \rightarrow 4x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x^3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$ $S''(x) = \dfrac{16}{x^3} + 4$ $S''(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{16}{(\sqrt[3]{2})^3} + 4 = 12 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي: $l = x = \sqrt[3]{2}\text{ m}, \quad w = x = \sqrt[3]{2}\text{ m}, \quad h = \dfrac{2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{2}\text{ m}$

أتحقق من فهمي صفحة 102

حجم الخزان $V = x^2h$

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$

$$54 = 4xh + x^2 \quad \rightarrow \quad 4xh = 54 - x^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{54 - x^2}{4x}\right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 54 - 3x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{54}{3} = 18 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18}\, m, \qquad w = x = \sqrt{18}\, m, \qquad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}}\, m$$

أتحقق من فهمي صفحة 103	
	$R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$ اقتران الإيراد $C(x) = 2250 + 18x$ اقتران التكلفة $P(x) = R(x) - C(x)$ اقتران الربح $P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$ $= 1732x - 2x^2 - 2250$ $P'(x) = 1732 - 4x$ $1732 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1732}{4} = 433$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$ $P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$ ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.
أتدرب وأحل المسائل صفحة 104	
1	محيط الحديقة من دون الجدار $P = AB + BC + CD$ $300 = AB + x + AB$ $300 = 2AB + x$ $300 - x = 2AB$ $AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$
2	مساحة الحديقة المستطيلة $A = BC \times AB$ $A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$ $= 150x - \frac{1}{2}x^2$
3	$A'(x) = 150 - x$ $150 - x = 0$ $x = 150$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$ $A''(x) = -1$ $A''(150) = -1 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما: $BC = x = 150 \text{ m} \quad , \quad AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$

4	نفرض x طول الحقل المستطيل الشكل، و y عرضه. $A = xy = 216 \Rightarrow y = \frac{216}{x}$ $P = 2x + 3y = 2x + 3\left(\frac{216}{x}\right) = 2x + 648x^{-1}$ $P'(x) = 2 - 648x^{-2} = 2 - \frac{648}{x^2} = \frac{2x^2 - 648}{x^2}$ $P'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 648 = 0 \Rightarrow x^2 = 324 \Rightarrow x = \sqrt{324} = 18$ $P''(\sqrt{324}) = \frac{1296}{18^3} > 0$ إذن، يكون طول السياج أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد كالآتي: $x = 18\,m\ \ , y = \frac{216}{18} = 72\,m$ وعندها يكون طول السياج كاملًا هو: $P = 2(18) + 3(72) = 252\,m$
5	حجم العلبة $V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$

6	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad or \quad x = 6$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = 6$ و $x = 20$ $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(20) = -312 + 24(20) = -312 + 480 = 168 > 0$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 6$ ، إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$
7	سعر المنتج الواحد هو $p(x) = 150 - 0.035x$ اقتران الإيراد $R(x) = (150 - 0.035x)x = 150x - 0.035x^2$
8	الإيراد الحدي: $R'(x) = 150 - 0.07x$ التكلفة الحدية: $C'(x) = 10 + 0.18x$ $R'(x) = C'(x)$ $150 - 0.07x = 10 + 0.18x$ $150 - 10 = 0.07x + 0.18x$ $140 = 0.25x$ $x = \frac{140}{0.25} = 560$
9	اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$ $= (150x - 0.035x^2) - (16000 + 10x + 0.09x^2)$ $= 150x - 0.035x^2 - 16000 - 10x - 0.09x^2$ $= 140x - 0.125x^2 - 16000$

10	$P'(x) = 140 - 0.250x$ $140 - 0.250x = 0$ $140 = 0.250x$ $x = \dfrac{140}{0.250} = 560$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 560$ $P''(x) = -0.250$ $P''(560) = -0.250 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 560$ ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 560 قطعة أكبر ربح ممكن هو: $P(560) = 140(560) - 0.125(560)^2 - 16000 = 23200$
11	سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن $p(250) = 150 - 0.035(560)$ $= 130.4$
12	$r + h = 60 \Longrightarrow h = 60 - r$ $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^2(60 - r) = 20\pi r^2 - \dfrac{1}{3}\pi r^3$ $V'(r) = 40\pi r - \pi r^2$ $V'(r) = 0 \Longrightarrow 40\pi r - \pi r^2 = 0 \Longrightarrow \pi r(40 - r) = 0 \Longrightarrow r = 0, r = 40$ $V''(r) = 40\pi - 2\pi r$ $V''(40) = 40\pi - 2\pi(40) = -40\pi < 0$ للاقتران قيمة عظمى محلية عندما $r = 40$ إذن، يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن عندما: $h = 20\ cm$ و $r = 40cm$

13	$200 = 2r + r\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{200 - 2r}{r}$ $A = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}r^2\left(\dfrac{200 - 2r}{r}\right) = 100r - r^2$
14	$A'(r) = 100 - 2r$ $A'(r) = 0 \Rightarrow r = 50$ $A''(r) = -2$ $A''(50) = -2 < 0$ إذن، أكبر مساحة ممكنة للقطاع الدائري هي: $A(50) = 100(50) - (50)^2 = 2500\ cm^2$
15	$V = 9x^2h - x^2h = 8x^2h$ $2000 = 8x^2h \Rightarrow h = \dfrac{250}{x^2}$ $A = 16x^2 + 12xh = 16x^2 + 12x\left(\dfrac{250}{x^2}\right) = 16x^2 + \dfrac{3000}{x}$
16	$A'(x) = 32x - \dfrac{3000}{x^2}$ $A'(x) = 0 \Rightarrow 32x - \dfrac{3000}{x^2} = 0 \Rightarrow 32x = \dfrac{3000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 93.75 \Rightarrow x = \sqrt[3]{93.75}$ $A''(x) = 32 + \dfrac{6000}{x^3}$ $A''(\sqrt[3]{93.75}) = 32 + \dfrac{6000}{\sqrt[3]{93.75}^3} = 32 + \dfrac{6000}{93.75} = 96 > 0$ إذن، توجد لهذا الاقتران قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{93.75}$ تكون المساحة الكلية الخارجية لسطح العلبة أقل ما يمكن عندما $x \approx 4.5cm$
17	$400 = 2x + 2\pi r \Rightarrow x = \dfrac{400 - 2\pi r}{2}$ $A = 2xr + \pi r^2 = 2\left(\dfrac{400 - 2\pi r}{2}\right)r + \pi r^2 = 400r - \pi r^2$

18	$A'(r) = 400 - 2\pi r$ $A'(r) = 0 \Rightarrow 400 - 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{200}{\pi}$ $A''(r) = -2\pi$ $A''\left(\frac{200}{\pi}\right) = -2\pi < 0$ إذن، للمضمار الدائري قيمة عظمى عندما $0 = \frac{400-2\pi r}{2} = x$ و $r = \frac{200}{\pi}$ أي أن المضمار لا يحتوي على أجزاء مستقيمة، وإنما هو مضمار دائري.

الدرس السادس: قاعدة السلسلة

	مسألة اليوم صفحة 106
	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.5$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{r=2.8}$ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: $A = 4\pi r^2$ $\frac{dA}{dr} = 8\pi r$ $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$ $= 8\pi(2.8)(0.5)$ $= 11.2\pi$ إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $11.2\pi\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ عندما يكون طول نصف قطرها 2.8 cm
	أتحقق من فهمي صفحة 108
a	$y = (x^2 - 2)^4$ $u = x^2 - 2 \quad , \quad y = u^4$ $\frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad \frac{dy}{du} = 4u^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 4u^3 \times 2x$ $= 8xu^3$ $= 8x(x^2 - 2)^3$
b	$y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$ $u = x^3 + 4x \quad , \quad y = u^{\frac{1}{2}}$ $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4 \quad , \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 4)$ $= \frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x}}$

أتحقق من فهمي صفحة 110	
a	$f'(x) = 5(x^4+1)^4(4x^3)$ $= 20x^3(x^4+1)^4$ $f'(1) = 20(1)^3((1)^4+1)^4 = 20 \times 16 = 320$
b	$f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$ $f'(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$ $f'(2) = \dfrac{2(2)+3}{2\sqrt{2^2+3\times 2+2}} = \dfrac{7}{2\sqrt{12}}$
c	$f(x) = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5} = (2x^2-7)^{\frac{5}{4}}$ $f'(x) = \dfrac{5}{4}(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}(4x)$ $= \dfrac{5}{4}(4x)(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}$ $= 5x \times \sqrt[4]{2x^2-7}$ $f'(4) = 5 \times 4 \times \sqrt[4]{2(4)^2-7} = 20\sqrt[4]{25}$
أتحقق من فهمي صفحة 111	
a	$f'(x) = 4(1+x^3)^3(3x^2) + 8x^7$ $= 12x^2(1+x^3)^3 + 8x^7$
b	$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3)^3$ $f'(x) = \dfrac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x-3)^2(1)$ $= \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - 3(x-3)^2$
أتحقق من فهمي صفحة 113	

a	$P'(t) = \dfrac{20t+1}{2\sqrt{10t^2+t+229}}$
b	$t = 2020 - 2015 = 5$ $P'(5) = \dfrac{20(5)+1}{2\sqrt{250+5+229}} = \dfrac{101}{2\sqrt{484}} \approx 2.3$ إذن، في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة.
أتحقق من فهمي صفحة 114	
	$\dfrac{dy}{du} = 5u^4 + 3u^2$ $\dfrac{du}{dx} = -4$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$ $= (5u^4 + 3u^2) \times -4$ $= -4(5(3-4x)^4 + 3(3-4x)^2)$ $= -20\,(3-4x)^4 - 12(3-4x)^2$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = -20(625) - 12(25) = -12800$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 114	
1	$f'(x) = 4(1+2x)^3(2)$ $= 8(1+2x)^3$
2	$f'(x) = -5(3-2x^2)^{-6}(-4x)$ $= 20x(3-2x^2)^{-6}$ $= \dfrac{20x}{(3-2x^2)^6}$
3	$f'(x) = \dfrac{3}{2}(x^2-7x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-7)$ $= \dfrac{3}{2}(2x-7)\sqrt{x^2-7x+1}$

4	$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{7-x}}$
5	$f'(x) = 16(2+8x)^3(8)$ $= 128(2+8x)^3$
6	$f(x) = (4x-8)^{-\frac{1}{3}}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}(4)$ $= -\dfrac{4}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}$ $= \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(4x-8)^4}}$
7	$f'(x) = \dfrac{9x^2}{2\sqrt{5+3x^3}}$
8	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-3)$
9	$f(x) = (2x-x^5)^{\frac{1}{3}} + (4-x)^2$ $f'(x) = \dfrac{1}{3}(2x-x^5)^{-\frac{2}{3}}(2-5x^4) + 2(4-x)(-1)$ $= \dfrac{2-5x^4}{3\sqrt[3]{(2x-x^5)^2}} - 8 + 2x$
10	$f'(x) = 4\left(\sqrt{x}+5\right)^3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $= \dfrac{2\left(\sqrt{x}+5\right)^3}{\sqrt{x}}$

11	$f'(x) = \frac{3(2x-5)^2(2)}{2\sqrt{(2x-5)^3}}$ $= \frac{3(2x-5)^2}{\sqrt{(2x-5)^3}} = 3\sqrt{2x-5}$
12	$f'(x) = 5(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4(6x^2 - 6x + 4)$
13	$f(x) = (4x+1)^{-2}$ $f'(x) = -2(4x+1)^{-3}(4)$ $= -\frac{8}{(4x+1)^3}$ $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{\left(4\times\frac{1}{4}+1\right)^3} = -1$
14	$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$ $f'(3) = \frac{-3}{\sqrt{25-(3)^2}} = -\frac{3}{4}$
15	$\frac{dy}{du} = 10u + 3$ $\frac{du}{dx} = 3x^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (10u+3) \times 3x^2$ $= (10(x^3+1)+3) \times 3x^2$ $= (10x^3+13) \times 3x^2$ $= 30x^5 + 39x^2$

16	$y = (2u+5)^{\frac{1}{3}}$ $\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(2u+5)^{-\frac{2}{3}}(2) = \frac{2}{3}(2u+5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u+5)^2}}$ $\frac{du}{dx} = 2x-1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u+5)^2}} \times (2x-1)$ $= \frac{2(2x-1)}{3\sqrt[3]{(2(x^2-x)+5)^2}}$ $= \frac{4x-2}{3\sqrt[3]{(2x^2-2x+5)^2}}$
17	$\frac{dy}{du} = 6u-5$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (6u-5) \times (2x)$ $= (6(x^2-1)-5) \times (2x)$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = (6(4-1)-5) \times (4) = 52$

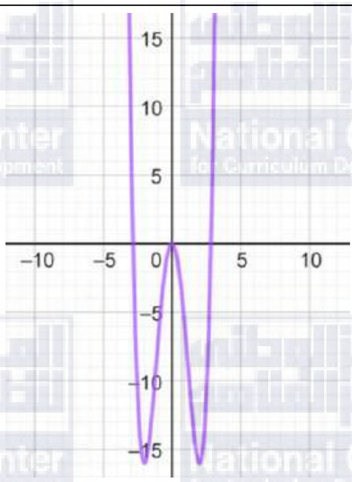
18	$\frac{dy}{du} = 3(1+u^2)^2(2u) = 6u(1+u^2)^2$ $\frac{du}{dx} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 6u(1+u^2)^2 \times (2)$ $= 12(2x-1)(1+(2x-1)^2)^2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = 12(2-1)(1+(2-1)^2)^2 = 48$
19	$C'(x) = \frac{1000(2x-0.1)}{2\sqrt{x^2-0.1x}} = \frac{2000x-100}{2\sqrt{x^2-0.1x}} = \frac{1000x-50}{\sqrt{x^2-0.1x}}$
20	$C'(20) = \frac{1000(20)-50}{\sqrt{(20)^2-0.1(20)}} = \frac{19950}{\sqrt{398}} \approx 1000$
21	$N(t) = 400(1-3(t^2+2)^{-2})$ $N'(t) = 400\left(6(t^2+2)^{-3}(2t)\right) = \frac{4800t}{(t^2+2)^3}$ $N'(1) = \frac{4800}{(1+2)^3} \approx 178$
22	$N'(4) = \frac{4800(4)}{(16+2)^3} \approx 3$
23	$f'(x) = g'\left(h(x)\right) \times h'(x)$ $f'(3) = g'\left(h(3)\right) \times h'(3)$ $= g'(2) \times -2$ $= 6 \times -2 = -12$

24	$f'(x) = 3\big(h(x)\big)^2 \times h'(x)$ $f'(3) = 3\big(h(3)\big)^2 \times h'(3)$ $= 3(2)^2 \times -2 = -24$
25	$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$ $h'(2) = f'\big(g(2)\big) \times g'(2)$ $= f'(3) \times -1$ نجد مشتقة f ونحسب $f'(3)$ $f(u) = u^2 - 1 \rightarrow f'(u) = 2u \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 = 6$ إذن، $h'(2) = f'(3) \times -1$ $= 6 \times -1 = -6$
26	$y = (x^2 - 4)^5$ $0 = (x^2 - 4)^5 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ $\rightarrow x = 2$ أو $x = -2$ $\frac{dy}{dx} = 5(x^2-4)^4(2x) = 10x(x^2-4)^4$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = 10(2)(2^2-4)^4 = 0$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=-2} = 10(-2)((-2)^2-4)^4 = 0$
27	$p(x)$ هو الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه دون تطبيق قاعدة السلسلة.
28	$f(x) = (2x + (x^2+x)^4)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3}(2x + (x^2+x)^4)^{-\frac{2}{3}}\big(2 + 4(x^2+x)^3(2x+1)\big)$ $= \frac{2 + 4(x^2+x)^3(2x+1)}{3\sqrt[3]{(2x+(x^2+x)^4)^2}}$

اختبار نهاية الوحدة الثانية

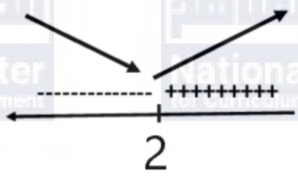
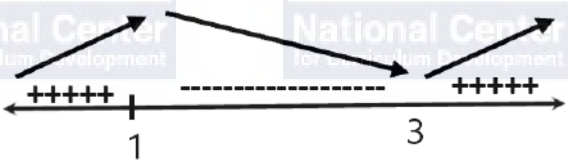
1	D
2	C
3	B
4	B
5	C
6	c
7	A
8	A
9	$\frac{1}{6}$
10	$\frac{3}{5}$
11	غير موجودة
12	$\frac{-2}{3}$
13	متصل، لأن النهاية تساوي قيمة(5)f وتساوي 13
14	غير متصل لأنه غير معرف عند 0
15	غير متصل لأن النهاية غير موجودة

16	$y = 2x + \frac{8}{x}$ $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{8}{x^2}$
17	$10 = 2x + \frac{8}{x} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = 2 - 8 = -6$ $m_{\text{المماس}} = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=4} = 2 - 0.5 = 1.5$
18	$y = (3x + a)(x - 1) = 3x^2 - 3x + ax - a$ $\frac{dy}{dx} = 6x - 3 + a$ $\frac{dy}{dx} = a \Rightarrow 6x - 3 + a = a \Rightarrow x = 2$ $x = 2 \Rightarrow y = 12 - 6 + a = 6 + a$ إحداثيات النقطة المطلوبة هي: $(2, 6 + a)$
19	$y = x^2(x^2 - p) = x^4 - px^2$ $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2px$

20	$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$ $\Longrightarrow 4x(x+2)(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0, -2, 2$ $x = 0 \Longrightarrow y = 0$ $x = -2 \Longrightarrow y = 16 - 32 = -16$ $x = 2 \Longrightarrow y = 16 - 32 = -16$ النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: $(0,0), (-2,-16), (2,-16)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 16$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=0} = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$ إذن، $(0,0)$ نقطة عظمى محلية $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=-2} = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$ إذن، $(-2,-16)$ نقطة صغرى محلية $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=2} = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$ إذن، $(2,-16)$ نقطة صغرى محلية
21	

22	ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x) = 12$ $f'(x) = 3x^2$ $3x^2 = 12$ $x^2 = 4 \rightarrow\ x = 2$ أو $x = -2$ $f(2) = (2)^3 + 3 = 11$ $f(-2) = (-2)^3 + 3 = -5$ النقاط هي $(2,11), (-2,-5)$
23	$f'(x) = 24 - 6x^2$ $24 - 6x^2 = 0$ $6x^2 = 24 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$ القيم الحرجة هي: $x = -2$ و $x = 2$ $f''(x) = -12x$ $f''(-2) = 24 > 0$ $f''(2) = -24 < 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$ و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$

24	$f'(x) = 3(3x-2)^2(3) - 9$ $\quad = 9(3x-2)^2 - 9$ $9(3x-2)^2 - 9 = 0$ $(3x-2)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 3x-2 = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x = 1$ أو $x = \frac{1}{3}$ القيمة الحرجة هي: $x = 1,\ x = \frac{1}{3}$ $f''(x) = 18(3x-2)^1(3) = 54(3x-2)$ $f''(1) = 54 > 0$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3-2)^3 - 9 = -8$ وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3(\frac{1}{3}) - 2\right)^3 - 9(\frac{1}{3}) = -4$
25	$f(x) = 4x^5 - 10x^2$ $f'(x) = 20x^4 - 20x$ $20x^4 - 20x = 0$ $20\,x(x^3 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ أو $x = 1$ القيم الحرجة هي: $x = 0$ و $x = 1$ $f''(x) = 80x^3 - 20$ $f''(0) = -20 < 0$ $f''(1) = 60 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$ و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$
26	غير موجودة
27	1

28	0
29	$pV = 1200 \Longrightarrow V = \dfrac{1200}{p}$ $p = 10 + 0.4\sqrt{t} = 10 + 0.4t^{\frac{1}{2}}$ $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dp} \times \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{1200}{p^2} \times 0.2t^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{240}{\sqrt{t}\left(10 + 0.4\sqrt{t}\right)^2}$ $\left.\dfrac{dV}{dt}\right\|_{t=100} = -\dfrac{240}{10(10+4)^2} = -\dfrac{6}{49}$
30	$g(x) = 3x^2 - 12x + 4$ $g'(x) = 6x - 12$ $g'(x) = 0 \Longrightarrow 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$  إذن، g متناقص في $(-\infty, 2)$، ومتزايد في $(2, \infty)$
31	$h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $h'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $h'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$ $\Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Longrightarrow (x-3)(x-1) = 0$ $\Longrightarrow x = 1, x = 3$  إذن، h متزايد في $(-\infty, 1), (3, \infty)$، ومتناقص في $(1,3)$

32	$s(t) = 10 + 6t - 0.5t^2$ $v(t) = s'(t) = 6 - t$ $v(10) = s'(t) = 6 - 10 = -4\ m/s$	
33	$V = x^2y$ $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$ $V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = 12$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 < 0$	حجم الصندوق مجموع أطوال الأحرف حجم الصندوق بدلالة x توجد قيمتان حرجتان هما $x = 12$ و $x = 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$

الوحدة الثالثة: الاحتمالات
الدرس الأول: التباديل والتوافيق

	مسألة اليوم صفحة 120
	${}_8C_2=28$
	أتحقق من فهمي صفحة 121
	$2\times3\times4\times3=54$
	أتحقق من فهمي صفحة 122
a	$5\times4\times3\times2\times1=120$
b	$5\times4\times3=60$
	أتحقق من فهمي صفحة 124
a	${}_{10}P_3=720$
b	${}_4P_4=24$
	أتحقق من فهمي صفحة 126
	${}_8C_5=56$
	أتحقق من فهمي صفحة 128
a	$P(A)=\frac{5\times5\times4\times3\times2\times1\times2}{7!}=\frac{5}{21}$
b	$P(A)=\frac{\frac{8!}{2!\,6!}}{\frac{16!}{2!\,14!}}=\frac{7}{30}$
	أتحقق من فهمي صفحة 130
a	${}_9C_4\times{}_5C_3=1260$ ${}_{14}C_7=3432$ $P(A)=\frac{1260}{3432}\approx0.37$
b	${}_9C_4\times{}_5P_2\times{}_3C_1=7560$ ${}_{14}P_2\times{}_{12}C_5=144144$ $P(A)=\frac{7560}{144144}\approx0.05$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 130	
1	$8! = 40320$
2	$9! - 2 \times 7! = 352800$
3	$\frac{6!}{2!\,3!} = 60$
4	$\frac{960}{60} = 16$
5	25872
6	47
7	36
8	$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$
9	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
10	$2 \times 5! - 24 = 216$
11	28
12	${}_{10}C_4=210$
13	${}_6C_1 \times {}_4C_3 + {}_6C_2 \times {}_4C_2 + {}_6C_3 \times {}_4C_1 = 194$
14	6
15	$\frac{n!}{(n-2)!} = 42 \quad \rightarrow n(n-1) = 42 \quad \rightarrow \quad n = 7$
16	$\frac{n!}{(n-3)!} = 10 \times \frac{n!}{(n-2)!} \rightarrow n(n-1)(n-2) = 10n(n-1) \quad \rightarrow \quad n = 12$
17	$\frac{n!}{(n-3)!\,3!} = 26n \quad \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 26n \quad \rightarrow \ n = 14$

18	$\frac{n!}{(n-5)!\,5!} = \frac{n!}{(n-7)!\,7!} \quad \rightarrow (n-5)(n-6) = 42 \quad \rightarrow \quad n = 12$
19	$\frac{n!}{(n-3)!\,3!} - \frac{(n-2)!}{(n-5)!\,3!} = 64 \quad \rightarrow n = 10$
20	${}_{24}P_2 \times {}_{22}C_2 = 127512$ ${}_{14}P_1 \times {}_{10}P_1 \times {}_{13}P_2 = 21840$ $P(A) = \frac{21840}{127512} \approx 0.17$
21	${}_7C_2=21 \quad \rightarrow P(A) = \frac{1}{21}$
22	${}_6C_2 \times {}_3C_2=45, \quad {}_9C_4=126, \quad \rightarrow P(A) = \frac{45}{126} \approx 0.36$
23	${}_6P_2 \times {}_3C_2=90, \quad \rightarrow P(A) = \frac{90}{126} \approx 0.7$
24	${}_8C_3=56 \quad \rightarrow P(A) = \frac{4}{56}$
25	$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \rightarrow r! = 1 \quad \rightarrow \quad r = 0$ أو $r = 1$
26	إجابة محتملة: يراد اختيار لجنة ثلاثية من بين 10 موظفين في شركة منهم سعيد وأمين وصادق، ما احتمال أن تتكون اللجنة من هؤلاء الزملاء الثلاثة؟ الإجابة: $\frac{1}{{}_{10}C_3}$
27	$\frac{1}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{182}$

الدرس الثاني: المتغيرات العشوائية

أتحقق من فهمي صفحة 133

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

أتحقق من فهمي صفحة 135

$X = \{1, 3, 4, 6\}$

X	1	3	4	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

أتحقق من فهمي صفحة 136

a	g=0.1
b	0.25+0.1=0.35
c	0.25+0.1+0.35=0.7
d	3

أتحقق من فهمي صفحة 138

a

X	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{7}{50}$	$\frac{22}{50}$	$\frac{18}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$

b $E(X) = \frac{119}{50} = 2.38$

أتحقق من فهمي صفحة 139

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{3}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{2}{15}$

$E(X) = 0.8$

أتحقق من فهمي صفحة 141

a	$E(X) = 1.4$
b	$Var(X) = 0.14$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 141

<table>
<tr><td>1</td><td>$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$X = \{ 2, 3\}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>$\frac{8}{27}$</td><td>$\frac{12}{27}$</td><td>$\frac{6}{27}$</td><td>$\frac{1}{27}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>6</td><td>$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
$= 1 - \frac{8}{27}$
$= \frac{19}{27}$</td></tr>
<tr><td>7</td><td><table><tr><td>X</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{9}{64}$</td><td>$\frac{9}{32}$</td><td>$\frac{5}{64}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>8</td><td>7</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$3b + 0.2 + 0.15 + 0.29 = 1 \quad \rightarrow b = 0.12$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$P(2 < X \leq 8) = 0.15 + 0.29 + 0.24 = 0.68$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.2 = 0.8$</td></tr>
<tr><td>12</td><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>$\frac{6}{115}$</td><td>$\frac{27}{92}$</td><td>$\frac{21}{46}$</td><td>$\frac{91}{460}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>13</td><td>$E(X) = -2 \times 0.13 - 1 \times 0.27 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.18 + 2 \times 0.22 + 3 \times 0.1$
$= 0.39$</td></tr>
</table>

14

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{5}{12} + 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{6} \approx 5.17$$

15

$$E(X) = 1 \times \frac{7}{500} + 2 \times \frac{30}{500} + 3 \times \frac{58}{500} + 4 \times \frac{135}{500} + 5 \times \frac{150}{500} + 6 \times \frac{70}{500} + 7 \times \frac{40}{500} + 8 \times \frac{10}{500}$$

$$\approx 4.62$$

16

$$-1 \times a + 0 \times 4b + 1 \times 2b + 2a = \frac{5}{12} \quad \rightarrow \quad a + 2b = \frac{5}{12}$$

$$a + 4b + 2b + a = 1 \quad \rightarrow \quad 2a + 6b = 1$$

$$a = \frac{1}{4}\ , \qquad b = \frac{1}{12}$$

17

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{3}{253}$	$\frac{30}{253}$	$\frac{90}{253}$	$\frac{195}{506}$	$\frac{65}{506}$

$$E(X) = 2.5$$

18

$$-2a + 3(1 - a) = 2 \quad \rightarrow a = -0.2$$

$$Var(Y) = 4 \times -0.2 + 9 \times 1.2 - 4 = 6$$

19

1

20

السحب دون إرجاع،

لأنه لو كان مع الإرجاع لظهرت النواتج $(2,2)$, $(5,5)$ التي تُعطي المجاميع 4 و10

21

X	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$

<table>
<tr><td>22</td><td>$(3,H,H,H),(5,H,H,H,T,T),(5,H,H,T,H,T),(5,H,H,T,T,H),$
$(5,H,T,H,H,T),(5,H,T,H,T,H),(5,H,T,T,H,H),(5,T,H,H,H,T),$
$(5,T,H,H,T,H),(5,T,H,H,H,T),(5,T,H,T,H,H),(5,T,T,H,H,H)$
$P(X)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{12}{32}=\frac{1}{6}$</td></tr>
<tr><td>23</td><td>إجابة محتملة:
<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>0.1</td><td>0.3</td><td>0.6</td></tr></table></td></tr>
</table>

اختبار نهاية الوحدة الثالثة

<table>
<tr><td>1</td><td>b</td></tr>
<tr><td>2</td><td>d</td></tr>
<tr><td>3</td><td>c</td></tr>
<tr><td>4</td><td>c</td></tr>
<tr><td>5</td><td>b</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$5! \times 4! \times 2 = 5760$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$4! \times 6! = 17280$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$5! \times 4! = 2880$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$\frac{4!}{3!} = 4$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>${}_6P_3 \times {}_6P_5 = 86400$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>${}_6P_1 \times {}_6P_6 \times {}_5P_1 = 21600$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>${}_1C_1 \times {}_5C_2 \times {}_5C_2 = 100$
${}_{11}C_5 = 462$
$P(A) = \frac{100}{462} \approx 0.22$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \approx 0.004$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>${}_5P_5 = 5! = 120$
${}_5P_5 \times 2 = 4! \times 2 = 48$
$P(A) = \frac{48}{120} = 0.4$</td></tr>
<tr><td>15</td><td><table><tr><td>X</td><td>3</td><td>8</td><td>10</td><td>14</td><td>15</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>$\frac{1}{14}$</td><td>$\frac{3}{14}$</td><td>$\frac{2}{14}$</td><td>$\frac{5}{14}$</td><td>$\frac{3}{14}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>16</td><td>$E(X) = \frac{3}{14} + \frac{24}{14} + \frac{20}{14} + \frac{70}{14} + \frac{45}{14} \approx 11.6$</td></tr>
<tr><td>17</td><td>$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$</td></tr>
</table>

18	$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$
19	$0.25 + k + 0.33 + 2k = 1 \quad \rightarrow \quad k = 0.81$
20	$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0.25 = 0.75$
21	$E(X) = 1 \times 0.25 + 2 \times 0.81 + 3 \times 0.33 + 4 \times 1.62 = 9.34$ $V(X) = (1)^2 \times 0.25 + (2)^2 \times 0.81 + (3)^2 \times 0.33 + (4)^2 \times 1.62 - (9.34)^2$ $= 23.04$
22	$\frac{n!}{(n-4)!\,4!} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \rightarrow (n-4)!\,4! = (n-3)!\,3!$ $\rightarrow \quad n - 3 = 4 \quad \rightarrow \quad n = 7$
23	$a = \frac{1}{5}$ و $b = \frac{1}{10}$ $a = \frac{1}{4}$ و $b = \frac{1}{16}$
24	<table><tr><td>G</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>P(G)</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>$\frac{5}{36}$</td><td>$\frac{7}{36}$</td><td>$\frac{9}{36}$</td><td>$\frac{11}{36}$</td></tr></table>
25	$P(2 < G \leq 5) = \frac{5 + 7 + 9}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$
26	$E(G) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.472$